

Feuille d'exercices n°3 : chap. 1

Exercice 26. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \neq 0 \quad f(x) = x \sin(x)$ et $f(0) = 0$.
Montrer que f est continue en 0. f est-elle dérivable en 0 ?
 f est-elle C^1 en 0 ? C^2 ?

Exercice 27. Soit f une fonction continue, bornée, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f admet un point fixe ($\exists c \in \mathbb{R}, f(c) = c$)

Exercice 28. Un cycliste parcourt 40km en deux heures. On suppose que sa vitesse et sa position sont des fonctions continues du temps.
Montrer qu'il y a un intervalle d'une heure pendant lequel le cycliste a parcouru exactement 20km.

Exercice 29. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans lui-même. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 30. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 \in]0, \pi[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 31. (★) (Règle de l'Hospital)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ telles que : $g(a) \neq g(b)$ et $\forall x \in [a, b] \quad g'(x) \neq 0$

- a) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$
b) En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \mu \in \mathbb{R}$ alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \mu$
c) Application : Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x - \sin(x)}$

Exercice 32. (★★) (Théorème de Darboux)

Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a, b]$.

Montrer que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

(f' prend toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $f'(b)$)

Exercice 33. a) Montrer que : $\forall x > 0 \quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$

b) Montrer que au voisinage de $+\infty$: $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \sim \ln(n)$

Exercice 34. Etudier le signe de $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$

Exercice 35. Etudier la fonction $f(x) = \arcsin\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$.

Exercice 36. Etudier la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 6}$.

On s'appliquera en particulier sur l'étude en 0 et en $+\infty$.

Exercice 37. (★)

Etudier $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$