

Feuille d'exercices n°5 : chap. 1

Exercice 49. (important) Intégrales de Wallis

On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

- Montrer à l'aide d'un bon changement de variable que $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = J_n$.
- Montrer que la suite (I_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
- Calculer les valeurs de I_0 et I_1 .
- Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} .
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$
- Déterminer une expression de la même forme pour I_{2n+1} .
- Montrer que : $I_{n+1} \sim I_n$
- Montrer que la suite définie par $\theta_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est une suite constante.
- Déterminer un équivalent simple de I_n en $+\infty$ et en déduire la limite de (I_n) .

Exercice 50. Lebesgue

Soit f une fonction de classe C^1 sur un segment $[a; b]$. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(nx) f(x) dx = 0$

Exercice 51. Formule de la moyenne

Soit $f \in C^0([a; b])$. Montrer que : $\exists c \in]a; b[\quad \int_a^b f(t) dt = (b-a)f(c)$

Exercice 52. ★

Calculer $A = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} dx$

Exercice 53. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$

Exercice 54. Pour $\alpha \geq 0$, donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$

Exercice 55. Calculer $\int_0^\pi [2\sin(t)] dt$

Exercice 56. (★)

Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{E(\sqrt{t})}{t^2} dt \in \mathbb{R}$

Remarque : on peut montrer (pas immédiat et dur) que cette valeur vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 57. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = [(n+1)(n+2) \dots (n+n)]^{\frac{1}{n}}$

Donner un équivalent de u_n .

Exercice 58. (★)

Soit f une fonction continue d'un segment de longueur non nulle $[a; b]$ dans $[0; +\infty[$.

Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b (f(t))^n dt \right)^{1/n} = \max_{x \in [a; b]} f(x)$