

Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°1

Exercice 1

Pour x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} & \ln(1 + sh(x)) \\ &= \ln(1 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) \text{ on utilise le DL, pour } u \text{ au voisinage de } u = 0 : \ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \\ &= (x + \frac{x^3}{6}) - \frac{1}{2}(x + \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{3}(x + \frac{x^3}{6})^3 + o(x^3) \\ &= x + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \text{ (on ne garde que les termes de degré } \leq 3) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

On a donc, pour x au voisinage de 0 : $\ln(1 + sh(x)) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$

Exercice 2

Pour x au voisinage de 0 : $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)} = \frac{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x}{x^2 \sin(x)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 \sin(x)} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} \sim \frac{-1}{6}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin(x)} \right) = \frac{-1}{6}$

Exercice 3

On pose :
$$\begin{array}{ccc} g & : & [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}$$

Comme f est continue alors g est aussi continue sur $[0, 1]$

$f([0, 1]) \subset [0, 1]$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) \in [0, 1] \\ f(1) \in [0, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(1) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) - 0 \geq 0 \\ f(1) - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(0) \geq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow g(0)g(1) \leq 0$$

On a donc : $\begin{cases} g \text{ continue sur } [0, 1] \\ g(0)g(1) \leq 0 \end{cases}$ et par le théorème des valeurs intermédiaires on a :

$$\exists c \in [0, 1] , g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$$

Conclusion : il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$

Exercice 4

Etape 1 : On utilise que Jacques ne ment jamais.

Par l'absurde :

si Jacques était à droite, il mentirai en disant qu'il est au milieu. Or Jacques ne ment jamais. absurde
Donc Jacques n'est pas à droite.

Etape 2 : On utilise que Jacques ne ment jamais.

Par l'absurde :

si Jacques était au milieu, il mentirai en disant qu'il est Pierre. Or Jacques ne ment jamais. absurde
Donc Jacques n'est pas au milieu.

Etape 3 :

En combinant les résultats des deux première étapes, Jacques ne peut-être que à gauche.

Etape 4 :

Comme Jacques est à gauche et qu'il ne ment pas, on en déduit que Charles est au milieu.

Etape 5 :

Pierre est à droite puisque les deux autres places sont prises par Jacques et Charles.

Etape 6 :

On a donc Pierre qui dit que Jacques est au milieu alors qu'il est à gauche.

Conclusion : Cette fois-ci Pierre à menti.

Problème 1

1)a) Pour $x \neq 0$ au voisinage de 0 : $f(x) = \frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{1+x+o(x)-1} = \frac{x}{x+o(x)} = \frac{1}{1+o(1)}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ et donc f est continue en 0

1)b) f est C^∞ et donc C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions qui le sont.

Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$

1)c) Pour $x \neq 0$ au voisinage de 0 :

$$f'(x) = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x(1+x+o(x))}{(1+x+o(x)-1)^2} = \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{(x+o(x))^2} \sim \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{-1}{2}$$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{-1}{2}$

1)d) f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{-1}{2}$, on en déduit, par le théorème de limite de la dérivée, que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = \frac{-1}{2}$

2)a) u est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$		+	-
$u(x)$	-1	0	$-\infty$

On en déduit le tableau de variation suivant :

2)b) On remarque que, pour $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x-1)^2}$.

Comme avec le tableau de variation de u on a : $u(x) < 0$ pour $x \neq 0$ alors $f'(x) < 0$ pour $x \neq 0$

Avec le 1)c) $f'(0) < 0$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$

2)c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

f est décroissante, d'après 2)b). On en déduit le tableau de variation :

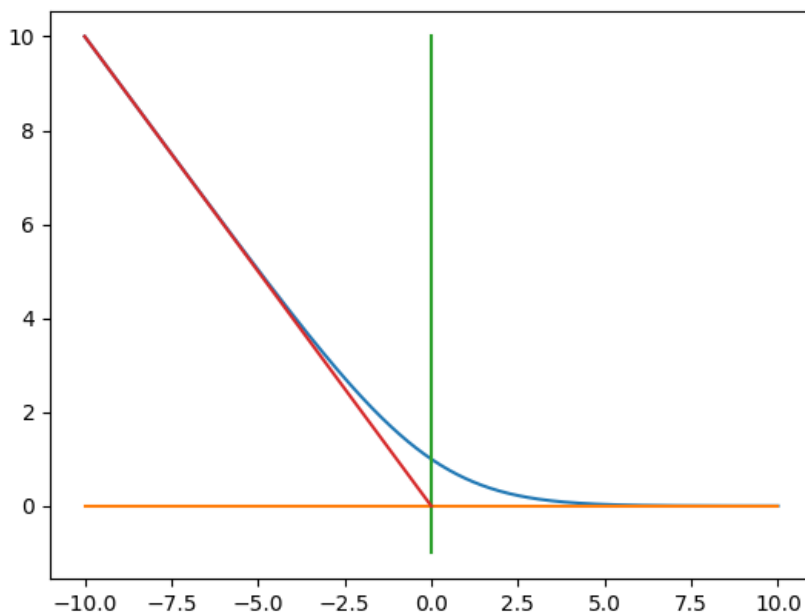
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0

2)d) On remarque que, en $-\infty$: $f(x) \sim -x$

On étudie donc $f(x) + x = \frac{x}{e^x-1} + x = \frac{x+xe^x-x}{e^x-1} = \frac{xe^x}{e^x-1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 0$

On en déduit que la droite $y = -x$ est asymptote de la représentation graphique de f .
(les deux courbes sont de plus en plus proche quand $x \rightarrow -\infty$)



2)e)

II) 1) Pour $x \neq 0$: $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x \Leftrightarrow x = xe^x - x \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$

Si $x = 0$: $f(0) \neq 0$ donc f admet un unique point fixe $\alpha = \ln(2)$

2)a) Posons : $v : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$ qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $v'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2e^x(e^x - 1 - x)$

Comme $(e^x)'' = e^x > 0$, $x \mapsto e^x$ est convexe. Comme $y = 1 + x$ est la tangente à $x \mapsto e^x$ en $x = 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x \Leftrightarrow e^x - 1 - x \geq 0$ et donc $v'(x) \geq 0$

Remarque : on a utilisé qu'une fonction convexe a sa représentation graphique qui est au dessus des ses tangentes. On aurait aussi pu faire une étude de fonction.

Sur $[0, +\infty[$ on a $v'(x) \geq 0$ donc v est croissante. Comme $v(0) = 0$ alors pour $x \geq 0$, $v(x) \geq 0$

On a bien : $\forall x \in [0, +\infty[$, $e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$

2)b) Pour $x > 0$: $f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2e^x - 2 - 2xe^x + (e^{2x} - 2e^x + 1)}{2(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$

On a bien : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$

2)c) Grâce au 2)a) on a : $\forall x > 0$, $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$ donc $\frac{-1}{2} \leq f'(x)$

Et avec le I)2)b) $f'(x) < 0$

Donc $\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

Comme $f'(0) = \frac{-1}{2}$ alors la relation est aussi vérifiée en $x = 0$ et donc : $\forall x \in [0, +\infty[$, $\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

2)d) f est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis, en particulier : pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe c_n compris entre u_n et α tel que : $f(u_n) - f(\alpha) = f'(c_n)(u_n - \alpha)$
 Mais comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$ alors : $u_{n+1} - \alpha = f'(c_n)(u_n - \alpha)$
 Comme u_n et α sont positif (par récurrence immédiate pour u_n) alors $c_n \geq 0$ et donc, avec 2)c) : $|f'(c_n)| \leq \frac{1}{2}$

On en déduit : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

3) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$

Initialisation :

au rang $n = 0$ l'inégalité s'écrit $|u_0 - \alpha| \leq |u_0 - \alpha|$, elle est donc évidente

Hérédité :

On suppose la propriété au rang n : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$

En combinant cette inégalité avec le 2)d) on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - \alpha|$

On a donc l'inégalité au rang $n + 1$

Conclusion, en écrivant $u_0 = 1$: $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |1 - \alpha|$

4) Comme $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et donc avec le 3) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

5)

def pluspetit(eps):

u=1

n=0

alpha=np.log(2)

while np.abs(u-alpha)>eps or n>5:

u=f(u)

n=n+1

return n

print(pluspetit(10**(-5)))

III) 1) f est C^1 sur $\mathbb{R}$, on peut donc considérer F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Alors $G(x) = F(2x) - F(x)$ et comme F est C^1 en tant que primitive d'une fonction continue (car C^1), alors, par composée de fonctions C^1 : G est C^1 sur $\mathbb{R}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$

Pour $x = 0$: $G'(0) = 2.1 - 1 = 1$

Pour $x \neq 0$: $G'(x) = 2 \frac{2x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^x-1} = \frac{4x}{e^{2x}-1} - \frac{x(e^x+1)}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{4x-xe^x-x}{e^{2x}-1} = \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

III)2)a) Si $x \geq 0$, f est décroissante et positive sur $[x, 2x]$ donc $\forall t \in [x, 2x]$, $0 \leq f(t) \leq f(x)$

Par croissance de l'intégrale : $\int_x^{2x} 0 dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt$

On a donc : $\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq G(x) \leq xf(x)}$

On a donc : $0 \leq G(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$ et par comparaison exp-puissance on en déduit : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0}$

2)b) Si $x < 0$, alors $2x \leq x < 0$ et donc $\forall t \in [2x, x]$, $f(x) \leq f(t)$

En intégrant entre $2x$ et x et par croissance de l'intégrale :

$$-xf(x) \leq \int_{2x}^x f(t) dt \Rightarrow -xf(x) \leq -G(x) \Rightarrow G(x) \leq xf(x)$$

On a donc : $\boxed{\forall x \in]-\infty, 0[, G(x) \leq xf(x)}$

Donc, pour $x < 0$, $G(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$

On en déduit, par comparaison : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty}$

On obtient le signe de $G'(x)$ grâce à l'expression du 1), on a les limites à la question 2) donc on a :

x	$-\infty$	0	$\ln(3)$	$+\infty$		
$G'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$
$G(x)$		$G(\ln 3)$				
			$\nearrow$		$\searrow$	
		0				0
	$\nearrow$					
	$-\infty$					

Problème 2

A.1) Montrons par une récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m \leq u_n \leq 4M$

Initialisation :

$$u_1 = L \leq \max(1, L) = M \leq 4M \text{ donc } u_1 \leq 4M$$

$$u_1 = L \geq \min(1, L) = m \text{ donc } m \leq u_1$$

On a bien : $m \leq u_1 \leq M$

$$u_2 = \sqrt{L} \leq \sqrt{M} \leq M \leq 4M \text{ car } M \geq 1$$

$$u_2 = \sqrt{L} \geq \sqrt{m} \geq m \text{ car } m \leq 1$$

Hérédité : On suppose $m \leq u_n \leq 4M$ et $m \leq u_{n+1} \leq 4M$

Alors comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ on a : $\sqrt{M} \leq \sqrt{u_n} \leq 2\sqrt{M}$ et $\sqrt{m} \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq 2\sqrt{M}$

En ajoutant ces deux inégalités : $2\sqrt{m} + 2\sqrt{m} \leq u_{n+2} \leq 2\sqrt{M} + 2\sqrt{M} \Rightarrow 4\sqrt{m} \leq u_{n+2} \leq 4\sqrt{M} \leq 4M$ car $M \geq 1 \Rightarrow \sqrt{M} \leq M$

De plus : $m \leq \sqrt{m} \leq 4\sqrt{m}$ car $m \leq 1$

Donc : $m \leq u_{n+2} \leq 4M$

Conclusion : on a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* , m \leq u_n \leq 4M}$

A.2) Supposons que (u_n) est convergente et notons U sa limite.

Alors en passant à la limite dans $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$ on obtient :

$$U = \sqrt{U} + \sqrt{U} \Rightarrow U = 2\sqrt{U} \Rightarrow U^2 = 4U$$

$$\Rightarrow U = 0 \text{ ou } U = 4 \text{ (car } U \geq 0 \text{ puisque } u_n \geq 0)$$

$$\Rightarrow U = 4 \text{ (car } U \geq m > 0 \text{ puisque } u_n \geq m)$$

Bilan : $\boxed{\text{Si } (u_n) \text{ est convergente, sa limite est } 4.}$

B.1) $f(-1) = 1 > 0$, $f(0) = -K < 0$ et $f(1) = 1 - 2K > 0$ car $K \in]0, \frac{1}{2}[$

Comme f est continue et change de signe entre -1 et 0 , f admet une racine $c \in]-1, 0[$

Comme f est continue et change de signe entre 0 et 1 , f admet une racine $C \in]0, 1[$

Comme f est un polynôme de degré 2, alors f admet au plus deux racines.

Bilan : $\boxed{f \text{ admet deux racines réelles } c \text{ et } C \text{ avec } c < C}$

B.2) Montrons par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq HC^n$

L'initialisation au rang 0 et 1 est donnée par l'énoncé : $0 \leq v_0 \leq H$ et $0 \leq v_1 \leq HC$

Hérédité : On suppose : $0 \leq v_n \leq HC^n$ et $0 \leq v_{n+1} \leq HC^{n+1}$

Donc, en ajoutant ces deux inégalités :

$$0 \leq v_n + v_{n+1} \leq HC^n(1 + C) \Rightarrow 0 \leq K(v_n + v_{n+1}) \leq HC^n \underbrace{K(1 + C)}_{C^2} \text{ car } f(C) = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq v_{n+2} \leq HC^{n+2}$$

Conclusion : $\boxed{0 \leq v_n \leq HC^n}$

B.3) Comme $C \in]0, 1[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} C^n = 0$ Avec l'inégalité de B.2) on en déduit : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$

$$\begin{aligned} & \text{C.1) } |u_{n+2} - 4| \\ &= |\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} - 4| \text{ on décompose } 4 = 2 + 2 \\ &= |\sqrt{u_{n+1}} - 2 + \sqrt{u_n} - 2| \text{ inégalité triangulaire} \\ &\leq |\sqrt{u_{n+1}} - 2| + |\sqrt{u_n} - 2| \\ &= \left| \frac{(\sqrt{u_{n+1}} - 2)(\sqrt{u_{n+1}} + 2)}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} \right| + \left| \frac{(\sqrt{u_n} - 2)(\sqrt{u_n} + 2)}{\sqrt{u_n} + 2} \right| \\ &= \left| \frac{u_{n+1} - 4}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} \right| + \left| \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n} + 2} \right| \end{aligned}$$

On a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+2} - 4| \leq \frac{|u_{n+1} - 4|}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} + \frac{|u_n - 4|}{\sqrt{u_n} + 2}}$

C.2) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leq w_n$

Initialisation :

$$u_0 - 4 = 0 - 4 \text{ donc } |u_0 - 4| = 4 \leq w_0 \text{ et } u_1 - 4 = L - a \text{ donc } |u_1 - 4| = |L - 4| \leq w_1$$

Hérédité : on suppose $|u_n - 4| \leq w_n$ et $|u_{n+1} - 4| \leq w_{n+1}$

D'après C.1 et comme $u_n \geq m$ on a :

$$|u_{n+2} - 4| \leq \frac{|u_{n+1} - 4|}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} + \frac{|u_n - 4|}{\sqrt{u_n} + 2} \text{ donc } |u_{n+2} - 4| \leq \frac{|u_{n+1} - 4|}{\sqrt{m+2}} + \frac{|u_n - 4|}{\sqrt{m+2}}$$

Avec l'hypothèse de récurrence : $|u_{n+2} - 4| \leq \frac{|w_{n+1}|}{\sqrt{m+2}} + \frac{|w_n|}{\sqrt{m+2}}$

Et par définition de K et de w_{n+2} : $|u_{n+2} - 4| \leq w_{n+2}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leq w_n}$

C.3) Par définition : $K \in]0, \frac{1}{2}[$

En prenant $H = \max(w_0, \frac{w_1}{C})$ on a : $\begin{cases} 0 \leq w_0 \leq H \\ 0 \leq w_1 \leq HC \end{cases}$

Donc (w_n) vérifie les hypothèses du B) et on en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

Avec C.2) on en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 4| = 0$

et donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4}$