

PSI* 2026-2027, Devoir surveillé de Mathématiques n°1

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Respecter impérativement l'ordre des questions.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
- Dessiner une fleur en dessous du mot **FIN**.
- Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.

Question de cours, Exercices proches du cours (questions indépendantes)

- 1°) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- 2°) Trouver les solutions sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de l'équation $\cos(7x) = \cos(5x)$
- 3°) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \sqrt{2 - e^{-x}}$

Exercice 1

Soit a et b deux nombres réels vérifiant : $a < b$ et soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$

- 4°) Justifier l'existence de $K = \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|$
- 5°) (★) Démontrer que : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq K \frac{(b-a)^2}{4}$

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt$

6°) Calculer u_0 et u_1 .

7°) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

8°) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

9°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!}$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

10°) A l'aide de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = v_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

11°) Montrer que les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

On note λ la limite commune aux deux suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

12°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n < \lambda < v_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

En déduire une valeur approchée de λ à 0,25 près.

13°) (★) Montrer que λ est un nombre irrationnel.

On raisonne par l'absurde en écrivant λ sous la forme $\lambda = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : On pose $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$

14°) Calculer W_0 et W_1

15°) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

16°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$

17°) Montrer que, au voisinage de $+\infty$: $W_{n+1} \sim W_n$

18°) Montrer que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = (n+1)W_n W_{n+1}$ est constante.

19°) Montrer que, au voisinage de $+\infty$: $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

20°) (★) Déterminer un équivalent (en $n = +\infty$) de $u_n = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2}) x^n dx$

21°) (★) Déterminer un équivalent (en $n = +\infty$) de $v_n = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2}) (1-x^2)^n dx$

Problème

Dans ce problème on considère la fonction

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Remarque : Les parties II) et III) sont indépendantes.

Partie I : Etude de f

22°) (Dérivation de f)

Montrer que f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.

23°) (Signe de f)

Etudier le signe de $f(x)$

24°) (Encadrement de f)

a) Prouver que pour tout réel $x > 0$: $\frac{-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Déterminer les nombres réels $x > 0$ tels que $f(x) = \frac{1}{x}$ ou $f(x) = \frac{-1}{x}$

On rangera ces nombres en deux suites strictement croissantes $(b_1, b_2, \dots, b_k, \dots)$ et $(c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$.

c) En déduire la position relative de la courbe représentative C de f et des courbes représentatives H_+ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et H_- de $x \mapsto \frac{-1}{x}$.

d) Comparer les tangentes à C et H_+ aux points d'abscisses b_k ainsi que les tangentes à C et H_- aux points d'abscisses c_k

25°) (Variations de f)

a) Etudier le signe de $x \mapsto \tan(x) - x$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et en déduire le signe de f' sur cet intervalle.

b) Prouver que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un élément x_k et un seul de $] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ tel que $\tan(x_k) = x_k$ et montrer que $x_k > k\pi$.

c) En déduire le signe de f' sur $]0; x_1[$, puis sur chaque intervalle $]x_k; x_{k+1}[$ avec $k \in \mathbb{N}$.

26°) (Etude en 0)

Effectuer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.

27°) (Courbe représentative de f)

a) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; 3\pi]$ (ne pas calculer les x_k et $f(x_k)$...)

b) Tracer sur une même figure les courbes H_- , H_+ et C en se limitant à l'intervalle $[0; 3\pi]$.

On pourra utiliser les valeurs approchées $x_1 \approx 4,49$, $x_2 \approx 7,73$, $\pi \approx 3,14$, $2\pi \approx 6,28$ et $3\pi \approx 9,42$

Partie II : Approximation de J

Dans cette partie, on décrit une méthode de calcul d'une valeur approchée de l'intégrale $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$

28°) (Transformation de J)

On pose : $\forall u \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, $\phi(u) = \int_{\frac{\pi}{2}}^u \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\forall x \in [0; \frac{1}{2}]$, $G(x) = \int_0^x \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt$

a) Prouver que pour tout élément x de $[0; \frac{1}{2}]$: $G(x) = \phi(\pi) - \phi(\pi(1-x))$.
(on pourra dériver ...)

b) En déduire que : $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt$

29°) (Approximation de J)

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t) dt$ et, si $n \geq 1$: $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin(\pi t) dt$

a) Prouver que pour tout $n \geq 1$: $J = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + r_n$ où $r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} dt$

b) Etablir que, pour tout élément t de $[0; \frac{1}{2}]$: $\frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \leq 2t^n$

En déduire une majoration simple de r_n .

c) Montrer que $J = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})$

30°) (Calcul des intégrales u_n)

a) Calculer u_0 et u_1

b) Etablir que pour tout entier $n \geq 2$: $u_n = \frac{1}{\pi^2} [\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)u_{n-2}]$

31°) (Conclusion du II)

A partir des résultats obtenus précédemment, indiquer une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision 10^{-2}

Partie III : une limite d'intégrale

On pose $\forall x \in [0; +\infty[$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = F(n\pi)$

32°) Soit $k \in \mathbb{N}$. Dresser le tableau de variation de F sur $[2k\pi; (2k+2)\pi]$
(sans calculer les valeurs de F)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t+n\pi} dt$ et $\alpha_n = \theta_{2n}$ et $\beta_n = \theta_{2n+1}$

33°) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

Indication : on pourra effectuer le changement de variable $t = u + k\pi$ dans u_k

33°) b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \geq \alpha_n$

33°) c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq \frac{1}{n}$

33°) d) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

33°) e) Que peut-on en déduire sur la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

34°) (*) Montrer que $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$ existe et est une limite finie.