

Question de cours (11 points)

1°) Voir cours

Barème : 3 points : f continue et à valeurs réelles **1**, $f(a)f(b) \leq 0$ **1** et conclusion **1**

$$2^\circ) \cos(7x) = \cos(5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 5x + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ 7x = -5x + 2k'\pi \text{ avec } k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ x = x + k'\frac{\pi}{6} \text{ avec } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Comme on résout sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: les solutions de $\cos(7x) = \cos(5x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ sont : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$

Barème : 3 points : Méthode **1**, résolution **1** conclusion **1**

3°) Au voisinage de $x = 0$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2 - e^{-x}} \\ &= (2 - e^{-x})^{\frac{1}{2}} \text{ on utilise le DL en } 0 : e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ &= (2 - (1 - (-x) + \frac{x^2}{2} + o(x^2)))^{\frac{1}{2}} \\ &= (1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Au voisinage de } 0 : (1 + u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}u^2 + o(u^2) = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$$

Donc, par composition de DL, puisque : $x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ est au voisinage de 0 :

$$\sqrt{2 - e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}(x - \frac{x^2}{2}) - \frac{1}{8}(x - \frac{x^2}{2})^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}(x - \frac{x^2}{2}) - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{On a donc : } \boxed{\sqrt{2 - e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)}$$

Barème : 5 points : DL de $\exp(-x)$ **1**, DL de $\sqrt{1+u}$ **1**, calculs **2**, conclusion **1**

Exercice 1 (7 points)

4°) Comme f est C^1 alors f' est continue sur $[a, b]$ qui est un segment de $\mathbb{R}$ donc fermé borné. Le théorème des bornes atteintes justifie alors l'existence de K

Barème : 2 points : f' continue sur segment **1**, TBA **1**

5°) • Soit $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$.

Alors f est continue sur $[a, t]$ et dérivable sur $]a, t[$, donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis et obtenir : $\forall t \in [a, \frac{a+b}{2}]$, $\exists c(t) \in [a, \frac{a+b}{2}]$, $f(t) - f(a) = f'(c(t))(t - a)$ ou encore $f(t) = f'(c(t))(t - a)$ puisque $f(a) = 0$ par hypothèse.

$$\text{Alors } \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(c(t))(t - a) dt$$

$$\text{Par l'inégalité de la moyenne : } \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt \right| \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(t)| dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt \right| \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \underbrace{|f'(c(t))|}_{\leq K} (t - a) dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt \right| \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} K(t - a) dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt \right| \leq [K \frac{(t-a)^2}{2}]_a^{\frac{a+b}{2}}$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt \right| \leq \frac{K}{2} \left(\frac{a+b}{2} - a \right)^2$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt \right| \leq \frac{K}{2} \left(\frac{b-a}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt \right| \leq \frac{K(b-a)^2}{8}$$

• De même, si $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$, on applique le théorème des accroissements finis sur $[t, b]$ et on a, comme $f(b) = 0$: $\forall t \in [\frac{a+b}{2}, b]$, $\exists c(t) \in [\frac{a+b}{2}, b]$, $f(t) = (t - b)f'(c(t))$

$$\text{Par le même calcul : } \left| \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) dt \right| \leq \frac{K(b-a)^2}{8}$$

• Par Chasles : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) dt$ donc par inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt \right| + \left| \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) dt \right|$$

$$\text{Donc avec les calculs précédents : } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{8} + \frac{M(b-a)^2}{8} = \frac{M(b-a)^2}{4}$$

$$\text{On a donc bien : } \boxed{\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{4}} \quad \text{Barème : 5 points}$$

Exercice 2 (21 points)

$$6^\circ) u_0 = \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

$$u_1 = \int_0^1 t e^{-t} dt = [-e^{-t}t]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt = -\frac{1}{e} + 0 + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\text{Bilan : } \boxed{u_0 = 1 - \frac{1}{e} \text{ et } u_1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

Barème : 2 points : 1 et 1

7°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: On intègre u_n par partie :

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt = [e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt = \frac{1}{e(n+1)!} + u_{n+1}$$

$$\text{La relation de récurrence cherchée est donc : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{1}{e(n+1)!} + u_n}$$

Barème : 3 points : Idée IPP 1, calculs 1, conclusion 1

8°) D'après le 5°) : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{e(n+1)!} \leq 0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus : $e^{-t} \frac{t^n}{n!} \geq 0$ sur $[0, 1]$ donc, par positivité de l'intégrale : $u_n \geq 0$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0, donc elle est convergente.

$$\text{Bilan : } \boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante convergente.}}$$

Barème : 2 points : décroissante et minorée 1, théorème 1

$$9^\circ) \forall t \in [0, 1], 0 \leq e^{-t} \frac{t^n}{n!} \leq \frac{1}{n!} \text{ car on a : } \begin{cases} 0 \leq e^{-t} \leq 1 \\ 0 \leq t^n \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{En intégrant sur } [0, 1], \text{ on obtient directement : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!}}$$

Barème : 1 point

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0 \text{ on en déduit par encadrements que : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

Barème : 1 point

$$10^\circ) \text{ D'après le 5°) : } \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = -\frac{1}{e} \frac{1}{(k+1)!}$$

On somme cette relation pour k variant de 0 à $n-1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = -\frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}$$

On remarque le télescopage dans la première somme et on fait le changement d'indice $p = k+1$ dans la seconde. On obtient : $u_n - u_0 = -\frac{1}{e} \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \right)$

$$\text{On utilise que } u_0 = 1 - \frac{1}{e} \text{ donc : } u_n - 1 + \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \Rightarrow u_n - 1 = -\frac{1}{e} \left(1 + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p!} \right) \Rightarrow u_n - 1 = -\frac{1}{e} v_n$$

$$\text{On en déduit : } v_n = e - e u_n \text{ et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ alors : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e}$$

Barème : 4 points : idée 2, calculs 2

11°) • $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$ donc (v_n) est croissante.

• $w_{n+1} - w_n$
 $= v_{n+1} - v_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$
 $= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$
 $= \frac{-n(n+1)+n-(n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!}$
 $= \frac{-2n^2-2n-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0$ donc (w_n) est décroissante.
 • $w_n - v_n = \frac{1}{n.n!} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

D'après le trois points précédents : $\boxed{(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}}$

Barème : 3 points : définition suites adjacentes **1**, **3×0.5** par hypothèse bien démontrée et **0.5** pour conclure

12°) (v_n) est strictement croissante et tend vers λ donc $v_n < \lambda$
 (w_n) est strictement décroissante et tend vers λ donc $\lambda < w_n = v_n + \frac{1}{n.n!}$

On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n < \lambda < v_n + \frac{1}{n.n!}}$

• On écrit l'inégalité ci-dessus sous la forme : $0 < \lambda - v_n < \frac{1}{n.n!}$ donc, pour $n = 2$: $0 < \lambda - v_2 < \frac{1}{4}$
 et v_2 est une valeur approchée de λ à $\frac{1}{4} = 0,25$ près.

$$v_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Donc : $\boxed{\frac{5}{2} = 2,5 \text{ est une valeur approchée de } \lambda = e \text{ à } 0,25 \text{ près.}}$

Barème : 3 points : inégalité **1**, valeur approchée **2**

13°) On écrit λ sous la forme proposée par l'énoncé : $\lambda = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

D'après le 10°) λ n'est pas un entier donc $q > 1$

On écrit maintenant l'inégalité du 10°) pour $n = q!$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{q!} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q!} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q.q!}$$

En multipliant par $q!$ on a : $\sum_{k=0}^{q!} \frac{q!}{k!} < p(q-1)! < \sum_{k=0}^{q!} \frac{q!}{k!} + \frac{1}{q}$

On remarque que : $A = \sum_{k=0}^{q!} \frac{q!}{k!}$ est un entier (puisque $q \geq k$) :

Alors $A < p(q-1)! < A + \frac{1}{q}$ donc $p(q-1)! \in]A, A + \frac{1}{q}[$

Mais $p(q-1)!$ est un entier et il n'y a pas d'entier dans l'intervalle $]A, A + \frac{1}{q}[$ puisque $A \in \mathbb{N}$ et $q > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{q} < 1$

On a donc une absurdité et on en déduit que : $\boxed{\lambda = e \text{ est un nombre irrationnel.}}$

Barème : 5 points

Exercice 3 (18 points)

$$14^\circ) W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{Donc } \boxed{W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = 1}$$

Barème : 1 point

$$15^\circ) W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geq 0} \underbrace{(\cos(t) - 1)}_{\leq 0} dt$$

L'intégrande étant négative sur l'intervalle d'intégration : $W_{n+1} - W_n \leq 0$ et donc $\boxed{(W_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

Barème : 2 points

16°) Soit $n \geq 1$, on fait une intégration par parties avec des fonctions C^1 dans W_{n+1} .

$$\begin{aligned} & W_{n+1} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \cos(t) dt \quad \text{on primitive le } \cos \text{ seul} \\ &= [\cos^n(t) \sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \sin(t) \cos^{n-1}(t) \sin(t) dt \\ &= 0 + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t) (1 - \cos^2(t)) dt \\ &= 0 + n(W_{n-1} - W_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{W_{n+1} = n(W_{n-1} - W_{n+1})}$$

En décalant les indices de 1 on a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}}$

Barème : 3 points : idée 1, calculs 2

17°) Comme $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante alors : $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$
On peut diviser par $W_n > 0$ et on obtient : $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$
 $\Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ et par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ et donc $\boxed{W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n}$

Barème : 3 points : idée 1, calculs 2

18°) $\alpha_{n+1} - \alpha_n = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_nW_{n+1} = W_{n+1}((n+2)W_{n+2} - (n+1)W_n) = 0$ en utilisant la relation de récurrence du 16°)

$$\boxed{\text{La suite } (\alpha)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est donc constante.}}$$

Barème : 1 point

19°) La suite $(\alpha)_n$ étant constante elle est égale à son premier terme, donc : $\alpha_n = \alpha_0$
 Ce qui donne $(n+1)W_{n+1}W_n = (0+1)W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$
 Alors : $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$
 En prenant l'équivalent : $nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ et comme $W_n > 0$ on obtient alors : $\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$

Barème : 2 points : méthode 1, $W_n > 0$ 1

20°) Effectuons dans u_n le changement de variable C^1 : $x = \cos(t)$ ou encore $t = \arccos(x)$ On a :
 $dx = -\sin(t)dt$

On obtient : $u_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos(t))^n \sqrt{1 - \cos^2(t)} (-\sin(t)) dt$
 $\Rightarrow u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \sqrt{\sin^2(t)} \sin(t) dt$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a : $\sin(t) \geq 0$
 $\Rightarrow u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \sin^2(t) dt$ on utilise $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$
 $\Rightarrow u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (1 - \cos^2(t)) dt$ linéarité de l'intégrale
 $\Rightarrow u_n = W_n - W_{n+2}$
 $\Rightarrow u_n = W_n - \frac{n+1}{n+2} W_n$
 $\Rightarrow u_n = \frac{1}{n+2} W_n$ on utilise l'équivalent de W_n trouver au 19°)
 $\Rightarrow u_n = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

On a donc : $\boxed{u_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n^{3/2}}}}$

Barème : 3 points

21°) Effectuons dans v_n le changement de variable C^1 : $x = \sin(t)$ ou encore $t = \arcsin(x)$ On a :
 $dx = \cos(t)dt$

On obtient : $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))^n \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt$

$\Rightarrow v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t))^n \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t) dt$

Comme $\cos(t) \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ alors : $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2n+2} dt = W_{2n+2}$

En utilisant l'équivalent du 19°) : $\boxed{v_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}}$

Barème : 3 points

Problème (60 points)

22°) Sur $]0; +\infty[$ x ne s'annule pas donc f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et $\forall x > 0$
 $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

En 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x} = \frac{\sin(x)-x}{x^2}$. En effectuant un DL au voisinage de 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x+o(x^2)-x}{x^2} = o(1).$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ et donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

$$\text{Bilan : } \boxed{f \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[\text{ et } f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Barème : 3 points : en 0 **2**, pour $x \neq 0$ **1**

23°) Pour $x > 0$, f est du signe de $\sin(x)$ et $f(0) = 1 > 0$ donc f est positive sur les intervalles $[2k\pi; (2k+1)\pi]$ et f est négative sur les intervalles $[(2k+1)\pi; (2k+2)\pi]$ avec $k \in \mathbb{N}$

Barème : 1 point

24°) a) Comme, pour $x > 0$: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et que $x > 0$ alors $\frac{-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$

On en déduit par encadrement que : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$

Barème : 1 point

b) $f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \sin(x) = 1$ et $f(x) = \frac{-1}{x} \Leftrightarrow \sin(x) = -1$

On peut donc exprimer les deux suites cherchées sous la forme :

$$b_k = k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ et } c_k = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (b pour } C \text{ et } H_+, c \text{ pour } C \text{ et } H_-)$$

Barème : 2 points : résolution de l'équation **1** , création et cohérence des suites **1**

c) D'après l'inégalité du a) : H_- est en DESSOUS de C qui est en DESSOUS de H_+ .

Barème : 1 point

d) Si on pose, pour $x > 0$, $h_+(x) = \frac{1}{x}$ alors on a : $(\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2} = h'_+(x)$ et $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

En $x = b_k$: $\sin(b_k) = 1$ et $\cos(b_k) = 0$ donc $h'_+(b_k) = f'(b_k)$, donc la tangente à C et H_+ aux points d'abscisse b_k est la même (point d'intersection et même coefficient directeur) on dit que les courbes C et H_+ sont tangentes aux points d'abscisses b_k .

De même les courbes C et H_- sont tangentes aux points d'abscisses c_k .

Barème : 3 points : raisonnement **2**, rédaction **1**

25°) a) Posons $t(x) = \tan(x) - x$ pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. t est dérivable sur son domaine.

On a : $t'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$. Donc t est croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

Comme $t(0) = 0$ alors: $t(x) = \tan(x) - x \geq 0$ pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

$$f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(x)(x - \tan(x))}{x^2} \text{ et donc d'après l'inégalité ci-dessus : } f'(x) \leq 0 \text{ pour } x \in]0; \frac{\pi}{2}[$$

Barème : 3 points : étude fonction pour signe **2**, signe de f' **1**

b) On prolonge la fonction t définie au a) sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.
 Sur $] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ t est croissante (calcul de t' fait au a) et les limites aux bornes sont $-\infty$ et $+\infty$,
 comme t est continue et strictement croissante, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un
 élément x_k et un seul de $] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ tel que $\tan(x_k) = x_k$; et comme $t(k\pi) = -k\pi < 0$ alors
 d'après les variations de t $x_k > k\pi$.

Barème : 3 points : continuité **1**, stricte monotonie **1**, comparaison à $k\pi$ **1**

c) Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors $f'(x) = \frac{\cos(x)(x - \tan(x))}{x^2}$ ce qui nous permet de voir que $f'(x)$ est du signe de
 $\cos(x)(x - \tan(x))$
 Sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) \leq 0$ d'après le a)
 Sur $]\frac{\pi}{2}; x_1[$, $\cos(x) \leq 0$ et $x - \tan(x) \geq 0$ d'après le b) donc $f'(x) \leq 0$
 Avec ce qui précède on a donc $f'(x) \leq 0$ sur $]0; x_1[$.

Sur $] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$, $\cos(x) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - \tan(x)$. C'est-à-dire, d'après
 l'étude du a) : positif sur $] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; x_{2k}[$ et négatif sur $]x_{2k}; \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$

Sur $] -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi; \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[$, $\cos(x) < 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\tan(x) - x$. C'est-à-dire,
 d'après l'étude du a) : négatif sur $] -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi; x_{2k+1}[$ et positif sur $]x_{2k+1}; \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[$

Bilan : $f'(x) \leq 0$ sur $]0; x_1[$.
 $f'(x) \geq 0$ sur $[x_{2k+1}; x_{2k+2}]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[x_{2k}; x_{2k+1}]$

Barème : 3 points : sur $]0, x_1[$ **1**, distinctions des cas **1**, signe **1**

26°) Pour $x \neq 0$ au voisinage de 0 :
 $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x}$ et donc

Au voisinage de 0 : $f(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$

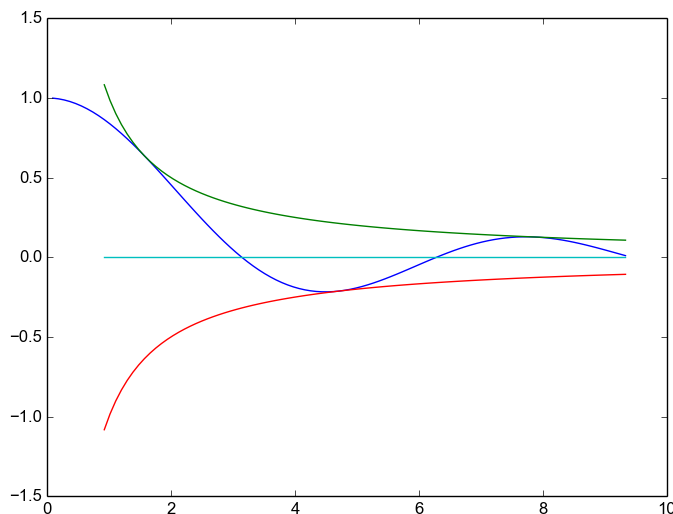
Barème : 2 points : **1** pour le résultat, **1** pour la rédaction

27°) a) Pour le signe de f' on utilise la question 25°)c) et on obtient :

x	0	x_1	x_2	3π
$f'(x)$	0	-	0	-
$f(x)$	1	$f(x_1)$		0

Barème : 2 points

b)



Barème : 4 points : courbe en $\pm \frac{1}{x}$ **1**, tangentes **1**, tangente en 0 **1**, allure globale **1**, non respect des axes **-1**

28°) a) On pose $\forall x \in [0; \frac{1}{2}]$: $b(x) = G(x) + \phi(\pi(1-x)) - \phi(\pi)$. Alors comme ϕ et G sont dérivables (primitives de fonctions continues), on a la fonction b qui est dérivable et :

$$b'(x) = G'(x) - \pi\phi'(\pi(1-x)) = \frac{\sin(\pi x)}{1-x} - \pi \frac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)} = \frac{\sin(\pi x) - \sin(\pi - \pi x)}{1-x} = \frac{\sin(\pi x) - \sin(\pi x)}{1-x} = 0$$

Remarque : G est une primitive de $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$, de même avec ϕ ...

Donc b est constante sur $[0; \frac{1}{2}]$, comme $b(0) = G(0) + F(\pi) - F(\pi) = G(0) = 0$ alors b est constante et nulle. On en déduit : $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, $G(x) = \phi(\pi) - \phi(\pi(1-x))$

Barème : 4 points : poser fonction **1**, justifier dérivées **1**, constante en 0 **1**, conclusion **1**

b) D'après le a) : $G(\frac{1}{2}) = \phi(\pi) - \phi(\frac{\pi}{2}) = J$ (par Chasles) et donc $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt$

Barème : 2 points : a) en $\frac{1}{2}$ **1** et Chasles **1**

$$29^\circ) \text{ a) } \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{1}{2}} t^k \sin(\pi t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=0}^{n-1} t^k) \sin(\pi t) dt$$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison $t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-t^n}{1-t} \sin(\pi t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t} \sin(\pi t) dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^n} \sin(\pi t) dt = J - r_n$$

On a alors l'écriture voulue.

Barème : 2 points : série géométrique de raison t **1** $t \neq 1$ **1**

b) Pour $t \in [0; \frac{1}{2}]$, $\pi t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ donc $0 \leq \sin(\pi t) \leq 1$. Donc $0 \leq t^n \sin(\pi t) \leq t^n$
 De plus $\frac{1}{2} \leq 1 - t \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1-t} \leq 2$, et en regroupant les résultats on a que pour tout élément t de $[0; \frac{1}{2}]$: $\frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \leq 2t^n$
 On en déduit $r_n \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2t^n dt$ et donc $r_n \leq \frac{1}{(n+1)2^n}$

Barème : 2 points

c) De l'inégalité du b) on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ et donc avec l'égalité du a) que :

$$J = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})$$

Barème : 1 point

$$30^\circ) \text{ a) } u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t) dt = \left[\frac{-\cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

$$u_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t \sin(\pi t) dt, \text{ on fait une intégration par parties avec des fonctions dérivables.}$$

$$\text{Alors } u_1 = \left[\frac{-t \cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi t)}{\pi} dt = 0 + \left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi^2}$$

$$\text{On a donc : } \left[u_0 = \frac{1}{\pi} \text{ et } u_1 = \frac{1}{\pi^2} \right]$$

Barème : 2 points (1+1)

b) On fait une intégration par partie avec des fonctions dérivables dans u_n avec $n \geq 2$:

$$u_n = \left[\frac{-t^n \cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{nt^{n-1} \cos(\pi t)}{\pi} dt$$

On refait une IPP :

$$u_n = 0 + 0 + \left[\frac{nt^{n-1} \sin(\pi t)}{\pi^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{n(n-1)t^{n-2} \sin(\pi t)}{\pi^2} dt = \frac{n}{\pi^2 2^{n-1}} - \frac{n(n-1)}{\pi^2} u_{n-2}$$

$$\text{On a donc : pour tout entier } n \geq 2 : \left[u_n = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)u_{n-2} \right] \right]$$

Barème : 3 points : IPP 1, justifiée 1, calculs 1

31°) Une valeur approchée de J est $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ à r_n près.

On cherche n tel que $r_n \leq 10^{-2}$.

$$\text{Avec le 12)b) } r_n \leq \frac{1}{(n+1)2^n}$$

$$\frac{1}{(n+1)2^n} \leq 10^{-2} \Rightarrow 100 \leq (n+1)2^n$$

On cherche n (si possible petit) vérifiant cette inégalité.

$\sum_{k=0}^4 u_k$ est donc une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

Ensuite on calcule $u_0, \dots, u_4$ par récurrence à l'aide de la relation du 13)b) et des valeurs du 13)a).

Barème : 2 points

Non demandé au DS : A la calculatrice on remarque que $n = 4$ ne convient pas mais que $n = 5$ convient. On obtient $J \approx 0.48117$

32°) F est une primitive de f qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc F est de classe C^1 et $F' = f$
 On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ il est donc immédiat d'avoir le signe de F'

x	$2k\pi$	$(2k+1)\pi$	$(2k+2)\pi$
$F'(x)$	0	+	0
$F(x)$	$F((2k+1)\pi)$ $F(2k\pi)$ $\nearrow$ $\searrow$ $F((2k+1)\pi)$		

Barème : 2 points : $F' = f$ justifié **1**, tableau **1**

33°) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n = F(n\pi) = \int_0^{n\pi} f(t)dt$

En utilisant la relation de Chasles : $\theta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt$

On effectue le changement de variable $t = u + k\pi$ dans $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt$,

on obtient : $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi} f(u + k\pi)du$

Mais $f(u + k\pi) = \frac{\sin(u+k\pi)}{u+k\pi} = (-1)^k \frac{\sin(u)}{u+k\pi}$ et donc $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt = (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+k\pi} du = u_k$

Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* , \theta_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k}$

Barème : 3 points : Chasles **1**, changement de variable **1**, le reste **1**

33°) b) $\beta_n - \alpha_n = \theta_{2n+1} - \theta_{2n} = u_{2n}$ d'après le a)

Mais $u_{2n} = \underbrace{(-1)^{2n}}_1 \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+(2n)\pi} du$ et donc $u_{2n} \geq 0$ car la fonction que l'on intègre est positive.

Remarque : plus généralement, comme ci-dessus, on peut montrer que u_n est positive si n est paire et négative si n est impair.

On a donc $\beta_n - \alpha_n \geq 0$ et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} , \beta_n \geq \alpha_n}$

Barème : 2 points

33°) c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+n\pi} du$

sur $[0; \pi]$ on a $\sin(u) \leq 1$ et $u + n\pi \geq n\pi$ et donc $\frac{1}{u+n\pi} \leq \frac{1}{n\pi}$

Donc $|u_n| \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi} du = \frac{1}{n}$ et on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* , |u_n| \leq \frac{1}{n}}$

Barème : 1 point

$$33^\circ) \text{ d) } \bullet \alpha_{n+1} - \alpha_n = \theta_{2n+2} - \theta_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n} = - \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+(2n+1)\pi} du + \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+2n\pi} du$$

Par linéarité de l'intégrale : $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \int_0^\pi \frac{2\pi \sin(u)}{(u+(2n+1)\pi)(u+2n\pi)} du$

Et donc $\alpha_{n+1} - \alpha_n \geq 0$ et donc $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

$$\bullet \beta_{n+1} - \beta_n = \theta_{2n+3} - \theta_{2n+1} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+(2n+2)\pi} du - \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+(2n+1)\pi} du$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\beta_{n+1} - \beta_n = \int_0^\pi \frac{-2\pi \sin(u)}{(u+(2n+2)\pi)(u+(2n+1)\pi)} du$$

Et donc $\beta_{n+1} - \beta_n \leq 0$ et donc $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

$$\bullet \beta_n - \alpha_n = u_{2n} \text{ et par le c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n - \alpha_n = 0$$

On déduit des trois points précédents que les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Barème : 2 points : définition "adjacentes" 1, calculs 1

33°) e) Les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant adjacentes, elles convergent vers la même limite que l'on nommera Λ .

On a alors, vu la définition de ces suites, que $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et converge vers Λ

Barème : 1 point

34°) Soit $x > 0$, on pose $n_x = \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$ (partie entière, on a : $\frac{x}{\pi} - 1 < n_x \leq \frac{x}{\pi} \Leftrightarrow x - \pi < \pi n_x \leq x$)

$$\text{Alors } F(x) = \int_0^{n_x \pi} f(t) dt + \int_{n_x \pi}^x f(t) dt = \theta_{n_x} + \int_{n_x \pi}^x f(t) dt$$

$$\text{Mais } \left| \int_{n_x \pi}^x f(t) dt \right| = \left| \int_{n_x \pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \left| \int_{n_x \pi}^x \frac{1}{n_x \pi} dt \right| \text{ et comme } x - n_x \pi \leq \pi \text{ alors } \left| \int_{n_x \pi}^x f(t) dt \right| \leq \frac{1}{n_x}$$

Donc comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} n_x = +\infty$ on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{n_x \pi}^x f(t) dt = 0$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta_{n_x} = \Lambda$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \Lambda$

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe est finie.

Barème : 3 points