

Chapitre 3 : Intégrales généralisées sur un intervalle

Dans ce chapitre, on considère des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1 Intégrales généralisées

1.1 Première définition

1.1.1 Définition

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.

Soit f une fonction continue par morceaux de $[a; b[$ dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente** si et seulement si la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t)dt$ existe et **est finie** dans $\mathbb{K}$.

Si l'intégrale est convergente on pose : $\int_a^b f(t)dt = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t)dt$

Si l'intégrale n'est pas convergente on dit qu'elle est **divergente**.

Remarque. Si la fonction f est prolongeable par continuité en $b \in \mathbb{R}$ alors on retrouve l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

1.1.2 Interprétation

Divers graphiques

1.2 Généralisation

1.2.1 Problème à gauche

Définition. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $a < b$.

Soit f une fonction continue par morceaux de $]a; b]$ dans $\mathbb{K}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente** si et

seulement si la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \int_x^b f(t)dt$ existe et est **finie** dans $\mathbb{K}$.

Si l'intégrale est convergente on pose : $\int_a^b f(t)dt = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \int_x^b f(t)dt$

Si l'intégrale n'est pas convergente on dit qu'elle est **divergente**.

1.2.2 Problèmes aux deux bornes

Définition. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.

Soit f une fonction continue par morceaux de $]a; b[$ dans $\mathbb{K}$. Soit $c \in]a; b[$

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente**

si et seulement si $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes

Si l'intégrale est convergente on pose alors : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

Si l'intégrale n'est pas convergente on dit qu'elle est **divergente**.

Remarque. La convergence et la valeur de $\int_a^b f(t)dt$ ne dépendent pas de c comme on le verra un peu plus loin.

1.3 Exemples

1.3.1 Exemple 1

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

1.3.2 Exemple 2

Trouver un exemple de fonction f pour que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente.

1.3.3 Exemple 3

Trouver un exemple de fonction f pour que $\int_0^1 f(t)dt$ soit convergente.

Trouver un exemple de fonction g pour que $\int_0^1 g(t)dt$ soit divergente.

1.3.4 Exemple 4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

1.4 Caractère locale de la convergence

Définition. On dit que deux intégrales convergentes ou divergentes sont *de même nature*.

Lemme. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.

Soit f une fonction continue par morceaux de $[a; b[$ dans $\mathbb{K}$. Soit $c \in]a; b[$.

Alors : $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature.

preuve :

Remarque. On voit que la nature de l'intégrale est une propriété locale de f .

1.5 Un exemple particulier

Construction de f continue, non bornée, positive, ne tendant pas vers 0 en $+\infty$ et telle que : $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente.

2 Propriétés des intégrales généralisées

2.1 Linéarité

2.1.1 Théorème

Théorème . Soit a et b dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ tels que : $a < b$.

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont convergentes alors $\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))dt$ est convergente.

Si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\int_a^b g(t)dt$ est divergente alors $\int_a^b (f(t) + g(t))dt$ est divergente.

Remarques. En particulier, si $\lambda \neq 0$ on a : $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b \lambda f(t)dt$ sont de même nature.

Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont divergentes alors, on ne peut, sans informations supplémentaires, rien dire sur

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt$$

preuve :

2.1.2 Corollaire

Lemme. L'ensemble des fonctions f continues par morceaux sur $]a; b[$ telles que $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

2.2 Positivité, croissance

Théorème . (Positivité)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Soit f une fonction continue par morceaux sur I .

Alors si f est positive et si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Théorème . (Croissance)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur I .

Alors si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont convergentes et si $\forall t \in I$, $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

preuve :

2.3 Relation de Chasles

Théorème . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Soit f une fonction continue par morceaux sur I telle que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Alors $\forall (c, d, e) \in (I \cup \{a, b\})^3$, $\int_c^e f(t)dt = \int_c^d f(t)dt + \int_d^e f(t)dt$

preuve :

2.4 Partie réelle et imaginaire

Théorème . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Soit f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{C}$.

Alors si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente on a :

$\int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt$ qui sont convergentes et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))dt$

preuve :

3 Intégrales de références

3.1 Intégrale du $\ln$ en 0

Théorème . $\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente

preuve :

3.2 Intégrales exponentielles

Théorème . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors : $\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha t)dt$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha > 0$

preuve :

3.3 Intégrales de Riemann

3.3.1 Définition

Définition. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $a > 0$.

Alors les intégrales $\int_a^{\frac{a}{t^\alpha}} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ sont appelées *intégrales de Riemann*

3.3.2 Etude

3.3.3 Bilan

Théorème . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $a > 0$. Alors :
$$\begin{cases} \int_a^{\frac{a}{t^\alpha}} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ est convergente} \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ est convergente} \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$$

Remarques. Les cas $\alpha = 1$ est le cas limite, l'intégrale ne converge jamais dans ce cas.

$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est toujours divergente.

Par contraposition :
$$\begin{cases} \int_a^{\frac{a}{t^\alpha}} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ est divergente} \Leftrightarrow \alpha \geq 1 \\ \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ est divergente} \Leftrightarrow \alpha \leq 1 \end{cases}$$

4 Etude pour des fonctions positives

Dans cette partie les fonctions sont continues par morceaux et à valeurs dans $[0; +\infty[$.

Les théorèmes seront énoncés sur $[a; b[$ et sont facilement adaptable à $]a; b]$

4.1 Lemme préliminaire

Théorème . Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.

Soit f une fonction continue par morceaux de $[a; b[$ dans $[0; +\infty[$.

Alors : $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est *majorée*.

4.2 Comparaison

Théorème . Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a; b[$ dans $[0; +\infty[$.

On suppose que : $\forall x \in [a; b[\quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$. Alors : $\int_a^b g(t)dt$ est convergente $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ est convergente

Remarques. Par contraposition on a : $\int_a^b f(t)dt$ est divergente $\Rightarrow \int_a^b g(t)dt$ est divergente

Quand on utilise ce théorème, il est nécessaire de bien faire apparaître que l'on a fait attention au signe.
Pour montrer la convergence, il faut majorer, pour la divergence il faut minorer.

preuve :

Exemple. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t+t^2}}$

4.3 Comparaison Série-intégrale

Théorème . Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction *positive, continue par morceaux, décroissante sur $[a; +\infty[$.*

Alors : $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\sum f(n)$ sont de même nature.

Remarques. Autre formulation : $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a; +\infty[$

En général $a > 0$, voir a aussi grand que l'on veut car le théorème est une propriété locale au voisinage de $+\infty$.

Si on enlève f positive le théorème reste vrai, mais si f prend une valeur négative alors les divergences sont grossières et n'ont pas beaucoup d'intérêt.

preuve :

4.4 Exemple

Exemple. $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$

5 Intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle

5.1 Fonction intégrable

Définition. Soit f une fonction continue par morceaux sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors on dit que f est *intégrable sur I* si et seulement si $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente avec $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Remarque. On note parfois $\int_I f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_I f$

Exemple. $t \mapsto \frac{\cos(\frac{1}{t})}{\sqrt{(t)}}$ est intégrable sur $]0; 1]$

5.2 Absolue convergence

Théorème . Soit f une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On pose $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Alors : f est *intégrable sur I* $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ est convergente

Remarque. Attention la réciproque est fausse.

preuve :

Exemple. $\int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{t})}{\sqrt{(t)}} dt$

5.3 Contre-exemple très classique

On montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente alors que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0; +\infty[$

5.4 Quelques propriétés supplémentaires

5.4.1 Inégalité de la moyenne

Théorème . Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On pose $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Alors : $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

preuve :

5.4.2 Théorème de l'intégrale généralisée nulle

Théorème . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.

Soit f une fonction de I dans K . Alors :
$$\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ intégrable sur } I \\ \int_I |f| = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ est nulle sur } I$$

preuve :

5.4.3 Inégalité triangulaire

Théorème . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.

Soit f et g deux fonctions continue par morceaux de I dans K , intégrables sur I . Alors $f + g$ est intégrable sur I

et et:
$$\left| \int_I (f + g) \right| \leq \int_I |f| + \int_I |g|$$

preuve :

5.4.4 Structure vectorielle

Notation : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $L^1(I, K)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I , à valeurs dans K et intégrable sur I .

Théorème . $L^1(I, K)$ est un K espace vectoriel.

preuve:

5.5 Autres formulations pour les intégrales de références

Lemme. Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1$
et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0; 1] \Leftrightarrow \alpha < 1$

preuve :

Lemme. Exponentielle

Soit $a > 0$, alors, $\forall b \in \mathbb{R} : t \mapsto \exp(-at)$ est intégrable sur $[b; +\infty[$

preuve :

Lemme. ln

$\forall a > 0 : t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0; a]$

preuve :

6 Théorèmes de comparaison

6.1 Equivalent

Théorème . Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a; b[$ dans K .

Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de b alors l'intégrabilité de f sur $[a; b[$ est équivalente à celle de g .

preuve :

Remarques. Autrement dit : Si $|f(x)| \sim |g(x)|$ au voisinage de b alors $\int_a^b |f|$ et $\int_a^b |g|$ sont de même nature.

Attention aux signes et aux valeurs absolues, on verra que l'on peut avoir $f \sim g$ et $\int_I f$ et $\int_I g$ qui ne sont pas de même nature.

Exemple.
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^t dt}{1 + \sin(t) + e^{t^2}}$$

6.2 Négligeable, dominée

Théorème . Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que : $a < b$.

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a; b[$ dans K .

Si $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de b alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f .

Si $f(x) = O(g(x))$ au voisinage de b alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f .

preuve :

Remarques. Autrement dit, sous les mêmes hypothèses : $\int_I |g|$ convergente $\Rightarrow \int_I |f|$ convergente et par contraposition $\int_I |f|$ divergente $\Rightarrow \int_I |g|$ divergente

Exemple. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

7 Changement de variable, intégration par parties dans les intégrales généralisées

7.1 Changement de variable

7.1.1 Enoncés

Théorème . Soit f une fonction continue sur $]a; b[$ et ϕ une bijection de classe C^1 , strictement croissante de $] \alpha; \beta[$ vers $]a; b[$.

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

preuve :

Remarques. ϕ est une bijection et on a : $a = \lim_{\substack{u \rightarrow \alpha \\ u > \alpha}} \phi(u)$ et $b = \lim_{\substack{u \rightarrow \beta \\ u < \beta}} \phi(u)$

On dit que l'on a effectué le changement de variable C^1 bijectif $t = \phi(u)$.

Le théorème peut s'adapter avec ϕ strictement décroissante, en faisant attention aux bornes.

7.1.2 Exemple

Exemple. $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^3}$

7.1.3 Applications aux intégrales de Riemann

Lemme. $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ ssi $t \mapsto f(a+t)$ l'est l'est en 0^+
 $x \mapsto f(x)$ est intégrable en b^- ssi $t \mapsto f(b-t)$ l'est l'est en 0^+

Corollaire. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Alors $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Remarque. On peut appliquer ce résultat à $\int_b^a \frac{dt}{|t-a|^\alpha}$

Exemple. L'intégrale généralisée $\int_{-1}^6 \frac{dt}{(t+1)^3}$ est divergente car $3 > 1$,

L'intégrale généralisée $\int_{-1}^2 \frac{dt}{\sqrt{t+1}}$ est convergente car $\frac{1}{2} < 1$.

7.2 Intégration par parties

7.2.1 Etude

7.2.2 Théorème

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b[$.

Si $\lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}} f(t)g(t)$ existe et est finie alors $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature et on a, en cas de convergence

$$: \int_a^b f'(t)g(t)dt = \lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

preuve :

7.2.3 Exemples

Exemple. $\int_1^{+\infty} xe^{-2x}dx = \dots$

Sommaire

1	Intégrales généralisées	1
1.1	Première définition	1
1.1.1	Définition	1
1.1.2	Interprétation	1
1.2	Généralisation	1
1.2.1	Problème à gauche	1
1.2.2	Problèmes aux deux bornes	1
1.3	Exemples	2
1.3.1	Exemple 1	2
1.3.2	Exemple 2	2
1.3.3	Exemple 3	2
1.3.4	Exemple 4	2
1.4	Caractère locale de la convergence	2
1.5	Un exemple particulier	2
2	Propriétés des intégrales généralisées	2
2.1	Linéarité	2
2.1.1	Théorème	2
2.1.2	Corollaire	3
2.2	Positivité, croissance	3
2.3	Relation de Chasles	3
2.4	Partie réelle et imaginaire	3
3	Intégrales de références	3
3.1	Intégrale du $\ln$ en 0	3
3.2	Intégrales exponentielles	3
3.3	Intégrales de Riemann	4
3.3.1	Définition	4
3.3.2	Etude	4
3.3.3	Bilan	4
4	Etude pour des fonctions positives	4
4.1	Lemme préliminaire	4
4.2	Comparaison	4
4.3	Comparaison Série-intégrale	5
4.4	Exemple	5
5	Intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle	5
5.1	Fonction intégrable	5
5.2	Absolue convergence	5
5.3	Contre-exemple très classique	5
5.4	Quelques propriétés supplémentaires	5
5.4.1	Inégalité de la moyenne	5
5.4.2	Théorème de l'intégrale généralisée nulle	6
5.4.3	Inégalité triangulaire	6
5.4.4	Structure vectorielle	6
5.5	Autres formulations pour les intégrales de références	6
6	Théorèmes de comparaison	6
6.1	Equivalent	6
6.2	Négligeable, dominée	7
7	Changement de variable, intégration par parties dans les intégrales généralisées	7
7.1	Changement de variable	7
7.1.1	Enoncés	7
7.1.2	Exemple	7
7.1.3	Applications aux intégrales de Riemann	7
7.2	Intégration par parties	8
7.2.1	Etude	8
7.2.2	Théorème	8
7.2.3	Exemples	8