

Mathématiques : contrôle des connaissances n°2

NOM, PRENOM :

1°) Énoncer la formule de Stirling.

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

2°) Énoncer le théorème concernant les séries de Riemann.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors : $\sum \frac{1}{n^\alpha} \Leftrightarrow \alpha > 1$ 3°) Déterminer, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de $\sum u_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n^{2\alpha+3}}$ Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et donc $u_n \sim \frac{1}{n} \frac{1}{n^{2\alpha+3}} \sim \frac{1}{n^{2\alpha+4}} > 0$ Par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs on a : $\sum u_n$ qui est de même nature que $\sum \frac{1}{n^{2\alpha+4}}$ Mais $\sum \frac{1}{n^{2\alpha+4}}$ est une série de Riemann, on sait donc par le cours, quelle converge si et seulement si $2\alpha + 4 > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{-3}{2}$ Bilan : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > \frac{-3}{2}}$ 4°) a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f(u) = (1+u)^{\frac{1}{3}}$

$$f(u) = (1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}u^2 + o(u^2) = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2)$$

On a donc : $\boxed{f(u) = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2)}$ 4°) b) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g(x) = (ch(x))^{\frac{1}{3}}$ On sait que : $ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $g(x) = (ch(x))^{\frac{1}{3}} = (1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ On a donc : $\boxed{g(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$