

A rendre le jeudi 8 octobre 2026

Devoir à la maison n°3 de Mathématiques

Code couleur :	noir	plutôt facile, à faire par tous
	bleu	un peu plus dur, (où complément)
	rouge	assez difficile
	vert	difficile

EXERCICE n°0

1) Effectuer le développement limité à l'ordre 3 en $x = 0$ de : $f(x) = \frac{\ln(1+\sin(x))}{\cos(x)}$

2) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} \ln(1+e^{-x})$

3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+2n+3}$

La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ? convergente ?

4) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2n+3}}$

La série $\sum v_n$ est-elle absolument convergente ? convergente ?

5) On pose : $\forall n \geq 2, w_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

Déterminer la nature de $\sum w_n$

EXERCICE n°1

On pose $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{e^t}{t+e^{2t}-1}$

1°) Etudier l'intégrabilité sur $]0, 1[$ de la fonction φ .

2°) Etudier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de la fonction φ .

3°) Etudier l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de la fonction φ .

EXERCICE n°2

Discuter suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'existence de $I = \int_1^{+\infty} \frac{1+t^\alpha}{t^2+t^\alpha} dt$

EXERCICE 3 : Intégrale de Gauss

1°) Montrer que l'intégrale $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.

2°) a) Montrer que : $\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq x$

2°) b) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in [0, \sqrt{n}] , (1 - \frac{t^2}{n})^n \leq \exp(-t^2)$

2°) c) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in [0, \sqrt{n}] , \exp(-t^2) \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt$ et $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-t^2) dt$

On définit également la suite d'intégrales généralisées $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^* v_n = \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$

3°) a) Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la convergence des intégrales v_n .

3°) b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* , u_n \leq I_n$

3°) c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* , I_n \leq v_n$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^* : w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$

On admet le résultat (voir TD Wallis) : $w_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

4°) a) A l'aide du changement de variable : $t = \sqrt{n} \sin(x)$ exprimer u_n en fonction de w_{2n+1} .

4°) b) A l'aide du changement de variable : $t = \sqrt{n} \tan(x)$ montrer que $v_n = \sqrt{n} w_{2n-2}$ pour $n \geq 1$

5°) Calculer G .

6°) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} , H_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$

En utilisant les résultats du TD sur les intégrales de Wallis, donner un équivalent de H_n en $+\infty$.

Problème

En dehors de sa dernière question, la partie II est indépendante de la partie I.

Partie I - Intégrales généralisées de Dirichlet

1. Les sous-questions sont indépendantes.

$$(a) \quad \begin{array}{lcl} g & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{On considère la fonction :} & & x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) i. Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

On **admet** l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

ii. Déterminer, pour $j \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$.

(c) Donner le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $t \mapsto \ln g(t)$.

(d) On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(a) Vérifier que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} dt$ est convergente.

(b) Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$?

3. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel t , on pose $h_n(t) = \sin^n(t)$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(a) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Justifier l'existence d'un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t , on a : $|h_n^{(k)}(t)| \leq K$.

(b) i. Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?

ii. Établir l'égalité : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(c) Justifier, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$.

(d) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Pour tout réel t , établir l'égalité : $h_{2n}(t) = \sin^{2n} t = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}$
 (b) En déduire pour tout réel t l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin 2jt.$$

- (c) En déduire l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}.$$

5. Étude asymptotique de la suite de terme général $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt$

- (a) Prouver que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.
 (b) i. Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
 ii. En déduire $\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

On pourra, en utilisant le résultat de la question 1.(c), donner un équivalent de $\ln \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \right)$
 où $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

- (c) i. Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a]$, on ait :

$$|e^{-u} - 1| \leq 2u.$$

- ii. Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$, on ait :

$$-t^3 \leq \ln \left(\frac{\sin t}{t} \right) + \frac{t^2}{6} \leq 0.$$

On utilisera le résultat de la question 1.(c).

- iii. En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) dt.$$

puis, toujours pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq 2 \frac{\ln^4 n}{n}.$$

- iv. En déduire $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$.

On se souviendra du résultat de 1.(d).