

Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°2

Exercice 1

1.1.) $\forall x \in [-1, 1]$, $1 - \frac{1}{2}x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ donc $1 - \frac{1}{2}x > 0$ et f est bien définie et C^∞ sur $[-1, 1]$

On a alors : $\forall x \in [-1, 1]$, $f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}x} = \frac{-1}{2-x} < 0$

On en déduit le tableau de variation :

x	-1	1
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$\ln(\frac{3}{2})$	$-\ln(2)$

On a donc : $f([-1, 1]) = [-\ln(2), \ln(\frac{3}{2})]$

On posera : $a = -\ln(2)$ et $b = \ln(\frac{3}{2})$

1.2.) On sait que : $\ln(2) \approx 0.69$ donc $-\ln(2) > -1$

De plus : $\frac{3}{2} = 1.5 < 2.718 < e$ donc $\ln(3/2) < \ln(e) = 1$.

On en déduit que : $[a, b] \subset [-1, 1]$

1.3.) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : v_n est bien définie et que $v_n \in [a, b]$

Initialisation :

D'après l'énoncé $v_0 \in [-1, 1]$ donc $f(v_0)$ est bien définie et $f(v_0) \in [a, b]$ d'après 1.1.

$v_1 = f(v_0)$ est donc bien définie et $v_1 \in [a, b]$

Hérédité : On suppose que : v_n est bien définie et que $v_n \in [a, b]$

Avec 1.2.) on a $v_n \in [-1, 1]$ donc, avec 1.1., $f(v_n)$ est bien définie et $f(v_n) \in [a, b]$

On a donc : v_{n+1} est bien définie et $v_{n+1} \in [a, b]$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, v_n est bien définie et $v_n \in [a, b]$

1.4.) $x \in [a, b]$ alors :

$$x \leq b \Rightarrow -b \leq -x \Rightarrow 0 < 2 - b \leq 2 - x \Rightarrow 0 < \frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{2-b} \Rightarrow 0 < -f'(x) \leq \frac{1}{2-b} \Rightarrow 0 < |f'(x)| \leq \frac{1}{2-b}$$

$$2 - b = 2 - \ln(3/2) > 1 \text{ donc } \frac{1}{2-b} \in]0, 1[$$

En posant $k = \frac{1}{2-b}$ on a : $\forall x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leq k$ avec $k \in]0, 1[$

1.5.) Soit $n \geq 2$, alors $n - 1 \geq 1$ et donc, d'après 1.3. : $v_{n-1} \in [a, b]$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à f (qui est C^1 sur $[-1, 1]$) entre 0 et v_{n-1} , on a :

$$\exists c \in [a, b], f(v_{n-1}) - f(0) = f'(c)(v_{n-1} - 0)$$

$$\text{Donc } |f(v_{n-1})| = |f'(c)| |v_{n-1}| \text{ puisque } f(0) = 0$$

Comme $|f'(c)| \leq k$ d'après 1.4.) alors on a bien, comme $f(v_{n-1}) = v_n$: $\forall n \geq 2$, $|v_n| \leq k |v_{n-1}|$

1.6.) A partir de 1.5.) on montre par récurrence que : $\forall n \geq 2, |v_n| \leq k^{n-2} |v_2|$
 Comme $k \in]0, 1[$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^{n-2} = 0$ et donc par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

2.) En appliquant la question 1. on a que, pour $x \in [-1, 1]$, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Avec 1.6) on a aussi que : $|u_n(x)| \leq k^{n-2} \underbrace{|u_2(x)|}_{\leq 1} \leq k^{n-2}$

On peut donc définir $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |u_n(x)|$ et on a : $\|u_n\|_\infty \leq k^{n-2}$

Comme $k \in]0, 1[$ on a $\sum k^{n-2}$ qui est une série convergente, et donc par comparaison $\sum \|u_n\|_\infty$ est convergente.

On en déduit que : $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1, 1]$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^5 = \sum_{k=1}^n \binom{k}{n}^5 n^5 = n^6 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$ avec $f : \begin{matrix} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 \end{matrix}$

Comme f est continue sur $[0, 1]$, on a, par les sommes de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t^5 dt = \frac{1}{6}$$

On en déduit, avec l'expression ci-dessus : $\sum_{k=1}^n k^5 \sim \frac{n^6}{6}$

Exercice 3

1°) Pour $n \geq 1$ on a : $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$ donc la suite (H_n) est croissante.

2°) a) $k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket \Rightarrow 0 < k \leq 2n$

Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$ on en déduit : $\forall k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket, \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$

2°) b) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ En utilisant le a) on a : $H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

Bilan : on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$

2°) c) (H_n) est croissante donc il y a deux cas possibles :

cas 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$ et cas 2 : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = \lambda$

Montrons par l'absurde que l'on est pas dans le cas 2.

SI $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = \lambda$ alors en passant à la limite dans l'inégalité du 2°) b) on obtient : $\lambda - \lambda \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \geq \frac{1}{2}$

ABSURDE

On est donc forcément dans le cas 1 et on a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$

3°) a) Pour $k \geq 1$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k; k+1]$, on a donc :

$\forall t \in [k; k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

En intégrant en t cette inégalité sur $[k; k+1]$ on obtient : $\forall k \geq 1, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$

3°) b) En sommant l'inégalité du a) pour k variant de 1 à $n-1$, on a, en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \Leftrightarrow \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \Leftrightarrow H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}$$

On a donc bien $\boxed{\forall n \geq 1, H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n}}$

3°) c) $H_n - 1 \leq \ln(n) \Rightarrow H_n \leq \ln(n) + 1$
 $\ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n} \leq H_n$ car $\frac{1}{n} > 0$ et donc $\ln(n) \leq H_n$

Bilan : on a donc $\boxed{\forall n \geq 1, \ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1}$

3°) d) Du c) on déduit : $\forall n \geq 1, 1 \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Par encadrements on a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ et par définition de l'équivalent on a donc : $\boxed{H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)}$

$$\begin{aligned} 4^\circ) \text{ a) } & \gamma_{n+1} - \gamma_n \\ &= (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln(n)) \\ &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \end{aligned}$$

Posons $\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x)$, on définit ainsi une fonction C^∞ sur $]0; +\infty[$

$$\text{On a } \forall x > 0, f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{-x-x(x+1)+(1+x)^2}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$$

Donc f est croissante sur $]0; +\infty[$, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ alors $\forall x > 0, f(x) < 0$

Comme $\gamma_{n+1} - \gamma_n = f(n) < 0$ alors on en déduit $\boxed{(\gamma_n) \text{ décroissante.}}$

4°) b) On a $\gamma_1 = 1 - \ln(1) = 1$ et (γ_n) est décroissante donc $\forall n \geq 1, \gamma_n \leq \gamma_1 \leq 1$

D'après le 3°) c) $\ln(n) \leq H_n$ et donc $0 \leq H_n - \ln(n) = \gamma_n$. On a $0 \leq \gamma_n$

Au bilan, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \gamma_n \leq 1}$

4°) c) (γ_n) est décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{(\gamma_n) \text{ est convergente.}}$

4°) d) Si on note γ la limite de cette suite alors, au voisinage de $+\infty$:

$$\gamma_n = \gamma + o(1) \Rightarrow H_n - \ln(n) = \gamma + o(1) \text{ et donc il existe un réel } \gamma \text{ tel que : } \boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)}$$

Remarque : γ s'appelle la constante d'Euler. On a $\gamma \approx 0,577$ à 10^{-3} près ...

Exercice 4

1°) Au voisinage de $+\infty$ on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^n}{n!}$ par comparaison puissance factorielle.

$$\text{On a donc } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Comme $0 < 1$, on sait alors, par la règle de D'Alembert que $\boxed{\sum \frac{2^n}{n+n!} \text{ est convergente}}$

2°) On a : $\forall n \geq 1, |u_n| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$
 Mais $\frac{3}{2} > 1$ donc $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente, et donc par la règle de comparaison (termes positifs), $\sum |u_n|$ est absolument convergente.

Par absolue convergence on a alors que $\sum \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est convergente

3°) On a : $\forall n \geq 2, |u_n| \leq \frac{1}{2^n}$ puisque $\left| \frac{\sin(n)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \leq 1$ pour $n \geq 2$
 Mais $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, donc par la règle de comparaison (termes positifs), $\sum |u_n|$ est convergente. Par absolue convergence on a alors que $\sum \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est convergente

4°) Au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sin(\ln(1 + \frac{1}{n})) - \sqrt{\frac{1}{1+n^2}} \\ &= \sin(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) - (n^2(1 + \frac{1}{n^2}))^{-\frac{1}{2}} \\ &= (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) - \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^3})) \\ &= (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o(\frac{1}{n^3})) \\ &= \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

On a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} > 0$.

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente alors par la règle de l'équivalent pour les séries à termes de signe constants, on a : $\sum (\sin(\ln(1 + \frac{1}{n})) - \sqrt{\frac{1}{1+n^2}})$ qui est une série convergente.

Problème 1

Q1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x+1)e^x$

$f'(x) > 0$ sur $] -1; +\infty[$, donc f est donc strictement croissante sur $[-1; +\infty[$.

f est strictement croissante et continue donc f réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ vers $f([-1; +\infty[)$

Comme $f([-1; +\infty[) = [-\frac{1}{e}; +\infty[$ alors : f réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ vers $[-\frac{1}{e}; +\infty[$

Q2) Par le théorème de la bijection réciproque on a que W est continue sur $[-e^{-1}; +\infty[$.

Comme on sait que f' est non nulle sur $] -1; +\infty[$ alors W est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et $W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))}$

Montrons alors par récurrence que W est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation :

On a $\forall x \in] -e^{-1}, +\infty[$, $W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))}$, comme W est continue et f' continue alors W' est continue et donc W est C^1 .

Remarque : on considère les fonctions sur $] -e^{-1}, +\infty[$.

Hérédité : Si on suppose W de classe C^k alors comme $W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))}$, que f est C^∞ , que W est C^k , on en déduit W' de classe C^k et donc W de classe C^{k+1} .

Conclusion : On a W de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et donc W est C^∞ .

Bilan : W est continue sur $[-e^{-1}; +\infty[$ et C^∞ sur $] -e^{-1}; +\infty[$

Q3) $f(t) = 0 \Leftrightarrow te^t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ donc $W(0) = 0$
 $W(f(t)) = t \Rightarrow f'(t)W'(f(t)) = 1$
 En $t = 0$ on a : $f'(0)W'(f(0)) = 1 \Rightarrow 1 \times W'(0) = 1 \Rightarrow W'(0) = 1$

On a donc $\boxed{W(0) = 0 \text{ et } W'(0) = 1}$

Q4) • W étant C^1 , au voisinage de 0, on a par la formule de Taylor-Young :

$W(x) = W(0) + xW'(0) + o(x) = x + o(x)$ et donc $\boxed{W(x) \underset{0}{\sim} x}$

• On a : $W(x)e^{W(x)} = x$ et pour x au voisinage de $+\infty$, $W(x) > 0$ donc on peut prendre le $\ln$, ce qui donne : $\ln(W(x)) + W(x) = \ln(x)$

Mais, d'après Q1) : $W(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et, par comparaison puissances $\ln$ en $+\infty$ on a : $W(x) + \ln(W(x)) \sim W(x)$

Finalement $\boxed{W(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)}$

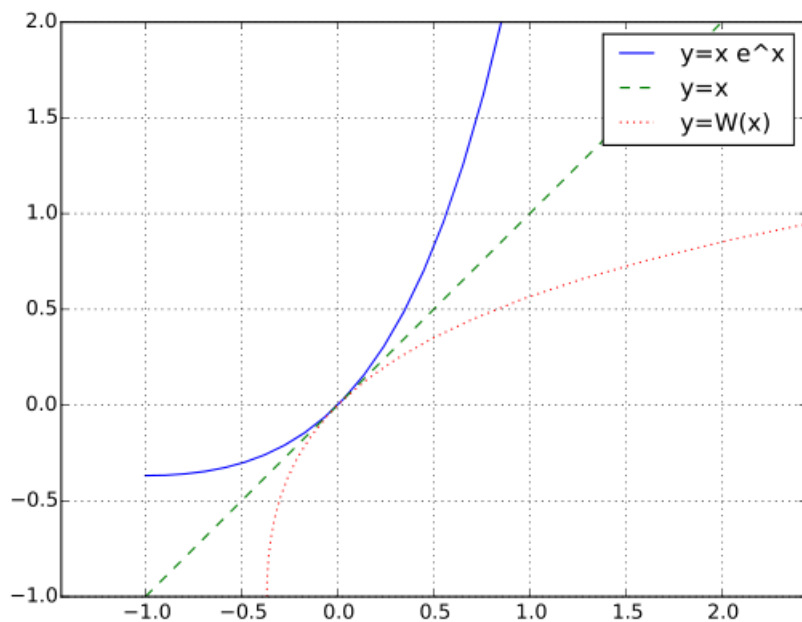
Q5) On sait déjà d'après le cours que les représentations graphiques de f (notée Γ_f) et W (notée Γ_W) sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite $y = x$.

La tangente au point d'abscisse $x = 0$ de Γ_f est la droite d'équation $y = x$ d'après les résultats de Q3).

Par symétrie, c'est aussi celle de Γ_W au point d'abscisse $x = 0$.

Comme $f'(-1) = 0$, Γ_f admet une tangente horizontale au point $(-1, -e^{-1})$

Par symétrie, Γ_W admet une tangente verticale au point $(-e^{-1}, -1)$



Q6) $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $]0; 1]$, il y a un problème pour l'intégrabilité seulement en 0.

D'après Q4), au voisinage de 0 : $x^\alpha W(x) \sim x^\alpha x = \frac{1}{x^{-1-\alpha}} > 0$

Or avec les intégrales de Riemann, on sait que $x \mapsto \frac{1}{x^{-1-\alpha}}$ est intégrable en 0 ssi $-1 - \alpha < 1 \Leftrightarrow -2 < \alpha$

Bilan : $\boxed{x \mapsto x^\alpha W(x) \text{ est intégrable sur }]0; 1] \Leftrightarrow \alpha > -2}$

Q7) $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $[1; +\infty[$, problème pour l'intégrabilité seulement en $+\infty$.

Avec Q4), au voisinage de $+\infty$: $x^\alpha W(x) \sim \ln(x)x^\alpha > 0$

• Si $\alpha \geq -1$ alors $x^\alpha W(x) \sim \ln(x)x^\alpha \geq x^\alpha > 0$ au voisinage de $+\infty$ car $\ln(x) \geq 1$ au voisinage de $+\infty$
Comme $x \mapsto x^\alpha$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (Riemann et $\alpha \geq -1$), alors, par comparaison, $x \mapsto \ln(x)x^\alpha$ n'est pas intégrable en $+\infty$ et, par équivalent $x \mapsto x^\alpha W(x)dx$ n'est pas intégrable en $+\infty$

On a donc : $\alpha \geq -1 \Rightarrow x \mapsto x^\alpha W(x)$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$

• Si $\alpha < -1$, on choisit β tel que $\alpha < \beta < -1$ (par exemple $\frac{\alpha-1}{2}$) alors :
 $\frac{x^\alpha W(x)}{x^\beta} \sim \frac{\ln(x)}{x^{\beta-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $\beta > \alpha$ et comparaison $\ln$ puissance en $+\infty$

On a donc $x^\alpha W(x) = o(x^\beta)$

Or $\beta < -1 \Leftrightarrow -\beta > 1$ donc $\int_1^{+\infty} x^\beta dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-\beta}} dx$ est convergente.

Donc, par négligeabilité, $\int_1^{+\infty} x^\alpha W(x) dx$ convergente.

Donc $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$

Bilan : $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1; +\infty[\Leftrightarrow \alpha < -1$

Q8) Comme $f'(x) = (x+1)e^x < 0$ sur $] -\infty; -1]$, f est strictement décroissante et continue sur $] -\infty; -1]$.

f réalise donc une bijection de $] -\infty; -1]$ sur $f(] -\infty; -1]) = [-\frac{1}{e}; 0[$

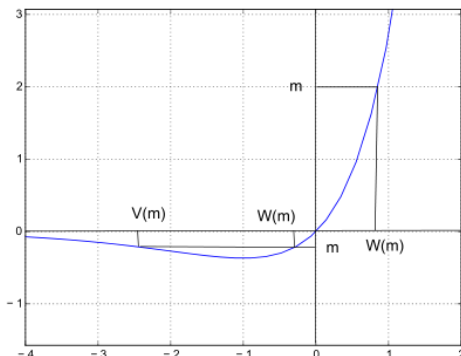
Q9) Dressons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	0	$-e^{-1}$	$+\infty$

On utilise la continuité de f et la stricte monotonie de f pour déterminer le nombre de solutions de :
 $xe^x = m \Leftrightarrow f(x) = m$

conditions sur m	nombre de solutions de $f(x) = m$	solutions
$m < -e^{-1}$	0	
$m = -e^{-1}$	1	$V(-e^{-1}) = W(-e^{-1}) = -1$
$-e^{-1} < m < 0$	2	$V(m)$ et $W(m)$
$m \geq 0$	1	$W(m)$

Q10) Toujours d'après le tableau de variation et avec le graphique :



conditions sur m	solutions de $f(x) \leq m$
$m < -e^{-1}$	$\emptyset$
$m = -e^{-1}$	$\{V(-e^{-1})\} = \{W(-e^{-1})\} = \{-1\}$
$-e^{-1} < m < 0$	$[V(m); W(m)]$
$m \geq 0$	$] -\infty; W(m)]$

Q11) Comme $b \neq 0$ et $a \neq 0$

$$e^{ax} + bx = 0 \Leftrightarrow 1 + bxe^{-ax} = 0 \Leftrightarrow xe^{-ax} = \frac{-1}{b} \Leftrightarrow -axe^{-ax} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow f(-ax) = \frac{a}{b}$$

Cas 1 : $\frac{a}{b} < -e^{-1}$ pas de solution

Cas 2 : $\frac{a}{b} = -e^{-1}$ une solution $-ax = W(-e^{-1}) \Leftrightarrow x = \frac{-W(-e^{-1})}{a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$

Cas 3 : $-e^{-1} < \frac{a}{b} < 0$ deux solutions $-ax = W(\frac{a}{b})$ ou $-ax = V(\frac{a}{b}) \Leftrightarrow x = \frac{-W(\frac{a}{b})}{a}$ ou $x = \frac{-V(\frac{a}{b})}{a}$

Cas 4 : $0 \leq \frac{a}{b}$ une solutions $-ax = W(\frac{a}{b}) \Leftrightarrow x = \frac{-W(\frac{a}{b})}{a}$

Problème 2

$$1) \text{ a) } \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

On en déduit que : $\sum a_n$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$

$$1) \text{ b) i) } h_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{ak}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n k(k+1)} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n (k^2 + k)} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2}$$

On sait d'après le cours que : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc :

$$h_n = \frac{n}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{(n+1)(\frac{2n+1}{6} + \frac{1}{2})} = \frac{6}{(n+1)(2n+4)} = \frac{3}{(n+1)(n+2)}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)}$

1) b) ii) On remarque que : $h_n = 3a_{n+1}$ et on en déduit donc la convergence de $\sum h_n$

On a alors (puisque les séries convergent) : $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 3a_{n+1} = 3[\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - a_1]$ et en utilisant le 1) a) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n = 3[1 - \frac{1}{2}] = \frac{3}{2} \text{ et on en déduit que : } \sum h_n \text{ est convergente et que } \sum_{n=1}^{+\infty} h_n = \frac{3}{2}$$

2) a) $q \in]0, 1[$, on a donc une série géométrique convergente et, d'après le cours : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$

$$h_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{ak}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n (\frac{1}{q})^{k-1}} = \frac{n}{\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 - \frac{1}{q}}} = \frac{n}{\frac{q^n - 1}{q^n - 1}} = \frac{n}{\frac{q^n - 1}{q^n - 1}} = n(1 - q) \frac{q^{n-1}}{1 - q^n}$$

On a donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n = n(1 - q) \frac{q^{n-1}}{1 - q^n}$

2) b) On a, comme $q_i n]0, 1[$: $h_n \sim n(1 - q)q^{n-1}$ et donc $\left| \frac{h_{n+1}}{h_n} \right| \sim \frac{(n+1)(1-q)q^n}{n(1-q)q^{n-1}} \sim q$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{h_{n+1}}{h_n} \right| = q \in]0, 1[$ donc par la règle de D'Alembert $\sum h_n$ est convergente.

On a : $0 \leq 1 - q \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{1-q^n} \leq 1$ donc $0 \leq h_n \leq nq^{n-1}$

Calculons, comme si q variait sur $]0, 1[$:

$$\sum_{n=1}^N nq^{n-1} = \sum_{n=0}^N \frac{d}{dq}(q^n) = \frac{d}{dq} \sum_{n=0}^N (q^n) = \frac{d}{dq} \left(\frac{1-q^{N+1}}{1-q} \right) = \frac{-(N+1)q^N(1-q) + (1-q)^{N+1}}{(1-q)^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-q)^2}$$

On a donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

Comme $0 \leq h_n \leq nq^{n-1}$ et que les séries convergent, on a : $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

Bilan :
$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq \frac{1}{(1-q)^2}$$

3) a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$P_n \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

$$\text{Initialisation : } P_1 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^1 x_i y_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 1} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^1 x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^1 y_i^2 \right) \Leftrightarrow x_1^2 y_1^2 + 0 = (x_1^2)(y_1^2)$$

La dernière égalité est bien sûr vraie, donc par équivalence P_1 est vraie.

Hérédité : on suppose P_n vraie. Alors :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i + x_{n+1} y_{n+1} \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i y_{n+1} - x_{n+1} y_i)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) x_{n+1} y_{n+1} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 + y_{n+1}^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + x_{n+1}^2 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) x_{n+1} y_{n+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 + y_{n+1}^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + x_{n+1}^2 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \end{aligned}$$

On utilise alors : P_n :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + x_{n+1}^2 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

$$\begin{aligned} & \text{D'autre part : } \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + x_{n+1}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 + y_{n+1}^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + x_{n+1}^2 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \end{aligned}$$

En regroupant les deux calculs ci-dessus on a donc P_{n+1}

Conclusion : on a démontré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$

3) b) On remarque que : $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0$ donc, avec le a) : $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$

En passant à la racine carrée :
$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

4) On pose : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{1}{2k^2} - \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ (on peut la faire car la série est bien convergente)

$$\text{Alors } u_{k+1} - u_k = \left[\frac{1}{2(k+1)^2} - \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \right] - \left[\frac{1}{2k^2} - \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \right]$$

Par télescopage : $u_{k+1} - u_k = \frac{1}{2(k+1)^2} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k(k+1)^2} = \frac{k^2 - (k+1)^2 + 2k}{2k^2(k+1)^2} = \frac{-1}{2k^2(k+1)^2} \leq 0$ donc la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$ (reste d'une série convergente) donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \geq 0$

$$\text{On en déduit : } \boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* , \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{k^2}}$$

5) a) On applique Cauchy Schwarz avec $x_k = \sqrt{a_k}k$ et $y_k = \frac{1}{\sqrt{a_k}}$ et on obtient (en renommant les indices) :

$$\sum_{k=1}^n k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n k^2 a_k} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

$$\text{Comme : } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ on a, en élevant au carré : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* , \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n k^2 a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right)}$$

$$5) \text{ b) On déduit de l'inégalité précédente : } \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \leq 4 \frac{1}{n^2(n+1)^2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 a_k \right)$$

$$\text{Et on a donc : } h_n \leq 4 \frac{1}{n(n+1)^2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 a_k \right)$$

$$\text{Si on somme pour } n \text{ variant de } 1 \text{ à } p : \boxed{\sum_{n=1}^p h_n \leq 4 \sum_{n=1}^p \frac{1}{n(n+1)^2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 a_k \right)}$$

5) c) On va réorganiser les indices :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^p \frac{1}{n(n+1)^2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 a_k \right) \\ = & \sum_{1 \leq k \leq n \leq p} \frac{k^2 a_k}{n(n+1)^2} \\ = & \sum_{k=1}^n \sum_{n=k}^n \frac{k^2 a_k}{n(n+1)^2} \\ \leq & \sum_{k=1}^n k^2 a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \text{ on utilise le 4) } \\ \leq & \sum_{k=1}^n k^2 a_k \frac{1}{2k^2} \\ \leq & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \end{aligned}$$

$$\text{En reportant dans le 5) b) : } \boxed{\sum_{n=1}^p h_n \leq 2 \sum_{k=1}^n a_k}$$

5) d) Comme la série $\sum a_k$ est convergente et que les a_k sont positifs on a : $\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

$$\text{Donc avec le c) : } \sum_{n=1}^p h_n \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

Comme les h_n sont positifs alors la suite $(\sum_{n=1}^p h_n)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, et comme on vient de voir quelle est majorée, alors elle est convergente.

$$\text{On en conclut : } \boxed{\sum h_n \text{ est convergente et en passant à la limite ci-dessus : } \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} a_k}$$

6) a) $\frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{n^\alpha} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente par Riemann car $\alpha > 1$, par règle de l'équivalent la série $\sum \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}$ est donc convergente.

$$\begin{aligned} \text{Alors } & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)^{\alpha+1}} \text{ (remplacé-compensé et terme nul pour } n=0) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \text{ (changement d'indice)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

Mais $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha + 1 > 2 \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{n^2}$ et en sommant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

En reportant dans l'inégalité ci-dessus : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\pi^2}{6}$

6) b) Par définition : $h_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n k^\alpha}$

Pour $k \geq 1$, comme $\alpha > 1$, on a, par croissance sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto t^\alpha : k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha dt$

En sommant de $k=1$ à n , et par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \leq \int_1^{n+1} t^\alpha dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

En inversant cette inégalité et en reportant dans la définition de h_n , on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n \geq (\alpha+1) \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}$

6) c) Soit $A > 0$.

On sait que $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et donc que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$

Donc $\exists N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq A+1$

Mais $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$, donc $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha \in]1, 1+\varepsilon[, \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right| \leq \varepsilon$

Alors $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \varepsilon \geq A+1 - \varepsilon = A$

Par positivité des termes $\frac{1}{n^\alpha}$ et convergence de la série ($\alpha > 1$) : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq A$

Donc $\forall A > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall \alpha \in]1, 1+\varepsilon[, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \geq A$ ce qui par définition de la limite signifie : $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$

6) d) En sommant le b), on a, car les séries convergent : $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \geq \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha+1) \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}$

En utilisant le a) et $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \geq (\alpha+1) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \frac{\pi^2}{6} \right)$

Avec la définition de C on a : $C \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq (\alpha+1) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \frac{\pi^2}{6} \right)$ et donc $C \geq (\alpha+1) \left(1 - \frac{\pi^2}{6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}} \right)$

En utilisant la limite du c) en conclut : $C \geq 2$ (Remarque : C est donc la meilleur constante possible ...)

7) a) Si on se place dans le cas de la question 2) : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq \frac{1}{(1-q)^2}$

Alors : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq K \sum_{n=1}^{+\infty} h_n$ et les résultats ci-dessus donnent : $\frac{1}{1-q} \leq K \frac{1}{(1-q)^2} \Rightarrow 1-q \leq K$, comme ce résultat est vraie pour tout $q \in]0, 1[$ alors $\boxed{K \geq 1}$

7) b) i) Si $n > N^2 + 1$ alors $g_n = \frac{1}{2^n}$ et $n-1 > N^2$ et donc $g_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$ Alors :
 $a_n = \frac{(\frac{1}{2^n})^n}{(\frac{1}{2^{n-1}})^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-(n-1)^2} = \frac{1}{2^{2n-1}}$
 $\sum a_n$ est donc une série géométrique (à partir d'un certain rang) de raison $\frac{1}{4}$ et donc $\boxed{\sum a_n \text{ est convergente.}}$

7°) b) ii) • On a : $0 \leq g_n \leq \frac{4}{2^n}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{2^n}$ et par somme d'une série géométrique
 $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leq 4 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4$ On a bien : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leq 4}$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq \sum_{p=1}^N a_{p^2}$

Mais $a_{p^2} = \frac{(g_{p^2})^{p^2}}{(g_{p^2-1})^{p^2-1}} = \frac{(\frac{4}{2^{p^2}})^{p^2}}{(\frac{4}{2^{p^2-1}})^{p^2-1}} = 2^{2p^2-p^4+(p^2-1)^2} = 2$ Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq \sum_{p=1}^N 2 = 2N$

On a bien : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq 2N}$

7°) c) $\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n \frac{(g_k)^k}{(g_{k-1})^{k-1}} = \frac{(g_n)^n}{(g_0)^0} = (g_n)^n$ par télescopage et car $g_0 = 1$

On a donc : $\boxed{(g_n)^n = \prod_{k=1}^n a_k}$

7°) d) • La fonction $\ln$ étant concave on a : $\frac{\sum_{k=1}^n \ln(\frac{1}{a_k})}{n} \leq \ln(\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}{n})$

Donc : $\frac{-\ln(\prod_{k=1}^n a_k)}{n} \leq \ln(\frac{1}{h_n})$

On utilise le c) : $\frac{-\ln((g_n)^n)}{n} \leq \ln(h_n)$

donc $-\ln(g_n) \leq -\ln(h_n)$ et donc $\boxed{h_n \leq g_n}$

• Avec le c) on a : $2N \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et avec la définition de K on a donc : $2N \leq K \sum_{n=1}^{+\infty} h_n$

Avec $h_n \leq g_n$ on obtient, en sommant : $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leq 4$ par le c)ii)

Donc $2N \leq 4K$

Cette inégalité devant être valable pour tout N il y a absurdité.

Bilan : $\boxed{\text{Il n'existe pas de constante } K > 0 \text{ telle que } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq K \sum_{n=1}^{+\infty} h_n}$