

Chapitre 4 : Espaces vectoriels, applications linéaires

Remarque préliminaire : dans ce chapitre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E et F sont deux K espaces vectoriels.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définitions

1.1.1 Loi interne et externe

Définitions. Soit E un ensemble.

On appelle **loi interne** de E toute application de $E \times E$ dans E .

On appelle **loi externe** de K sur E toute application de $K \times E$ dans E .

Exemples. L'addition dans $\mathbb{R}$ est une loi **interne**, la multiplication d'une matrice par un scalaire est une loi **externe**.

1.1.2 Définition Générale

Définition. On appelle K espace vectoriel tout ensemble E muni d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe de K sur E notée $\cdot$ vérifiant :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif
 - $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \in E$
 - $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
 - $\exists \vec{0}_E \in E \mid \forall \vec{u} \in E, \vec{0}_E + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0}_E = \vec{u}$
 - $\forall \vec{u} \in E \exists \vec{v} \in E, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}_E$
- $\forall \vec{u} \in E, 1_K \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- $\forall \vec{u} \in E \forall (\lambda, \mu) \in K^2, (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 \forall \lambda \in K, \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
- $\forall \vec{u} \in E \forall (\lambda, \mu) \in K^2, \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda \mu) \cdot \vec{u}$

Remarques. On revient rarement à cette définition sauf pour les exemples de bases vus en première année. Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, ceux de K **scalaires**.

1.2 Sous espace vectoriel

On pourra utiliser la caractérisation suivante :

Lemme. Soit E un K espace vectoriel et F une partie **non vide** de E . Alors :

F est un sous-espace vectoriel de E

si et seulement si $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F^2, \forall \lambda \in K, \vec{u} + \lambda \vec{v} \in F$

Lemme. Un sous espace vectoriel est un **espace vectoriel**.

Remarque. Pour montrer qu'un ensemble E est un K espace vectoriel, on montre que E est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel plus grand connu comme par exemple : K^n , $M_n(K)$, $K[X]$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ etc...

1.3 Intersection

Lemme. Soit F et G deux sous espaces vectoriels de E , alors $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E .

preuve :

1.4 Exemple

$F = \{f \in C_{PM}^0([0, 2], \mathbb{C}) \mid f(1) + f(0) = 0\}$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

2 Applications linéaires

2.1 Définition

Définition. Soit f une application de E dans F . Alors on dit que :

f est une application linéaire de E dans F
si et seulement si $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 \ \forall \lambda \in K \ , \ f(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = f(\vec{u}) + \lambda f(\vec{v})$

Remarques. On a alors $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

On note $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E .

2.2 Vocabulaire

Définitions. Avec les notations du paragraphe précédent.

- Si $E = F$ on parle d'endomorphisme.
- Si f est bijective on parle d'isomorphisme.
- Si f est bijective et que $F = E$ on parle d'automorphisme.

2.3 Somme et composée d'applications linéaires

Lemme. Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et $\lambda \in K$.

Alors $f + \lambda g$ est une application linéaire de E dans F .

Corollaire. $L(E, F)$ est un K espace vectoriel.

Lemme. Soit E, F et G trois K espaces vectoriels. Soit $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$ Alors $g \circ f \in L(E, G)$

2.4 Noyau

2.4.1 Définition

Définition. Soit $f \in L(E, F)$ alors on pose $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = \vec{0}_F\}$.

$\ker(f)$ est appelé noyau de f .

2.4.2 Lemme

Lemme. Soit $f \in L(E, F)$. Alors : $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E .

preuve :

2.4.3 Lien avec l'injectivité

Lemme. Soit $f \in L(E, F)$. Alors : f injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{\vec{0}_E\}$

preuve :

2.5 Image

2.5.1 Définition

Définition. Soit $f \in L(E, F)$ alors on pose $Im(f) = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E \ , \ f(x) = y\}$.

$Im(f)$ est appelé image de f .

2.5.2 Lemme

Lemme. Soit $f \in L(E, F)$. Alors : $\text{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de F .

preuve :

2.5.3 Lien avec la surjectivité

Lemme. Soit $f \in L(E, F)$. Alors : f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$

preuve:

3 Famille finie de vecteurs

3.1 Combinaison linéaire

Définitions. Soit $n \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille finie de n vecteurs de E .

Alors on appelle **combinaison linéaire** de la famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ tout vecteur de E s'écrivant :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \text{ avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n.$$

On note $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

On dit que c'est **l'espace vectoriel engendré par** $(x_1, \dots, x_n)$.

Lemme. $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous espace vectoriel de E

preuve :

Remarques. Certains coefficients peuvent être nuls.

Par exemple un polynôme de $K_n[X]$ est une combinaison linéaire de la famille finie $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$.

Un vecteur peut s'écrire sous forme de différentes combinaisons linéaires.

Par exemple : $X^2 = (X^2 + X + 1) - (1 + X) = (X^2 - 2X - 1) + (2X) + (1)$

3.2 Familles génératrices

Définition. Soit $A = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E . Alors on dit que :

A est **génératrice** de E , si et seulement si, $E = \text{Vect}(A)$.

Exemple. $(1 + X, 1 - X)$ est génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$

3.3 Famille libre, famille liée

Définitions. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille finie de E , alors on dit que :

$(x_1, \dots, x_n)$ est **libre**

si et seulement si $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas libre, on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est **liée**

Remarque. Par contraposée de la définition de libre.

Si $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ **non tous nuls** tel que : $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$ alors $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.

Exemple. $(1 + X, 1 - X)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_1[X]$

3.4 Bases

Définition. Une **base** de E est une famille libre et génératrice de E .

Exemple. $(1 + X, 1 - X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$

4 Dimension finie

4.1 Définition

Définition. Soit E un K espace vectoriel. Alors on dit que E est de dimension finie si et seulement si E admet une *base de cardinal fini*.

Lemme. Si E est de dimension finie alors toutes ses bases ont le même cardinal. Ce cardinal est appelé **dimension de E** .

preuve : voir cours de première année.

Exemple. $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3 car $(1, X, X^2)$ en est une base.

4.2 Sous espace vectoriel

Lemme. Tout sous espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

4.3 Théorème de la base incomplète

Théorème . Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs non nuls de E .

Alors, il existe $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ dans E^{n-p} tel que : $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E .

4.4 Propriété

Lemme. Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un K espace vectoriel E de dimension finie. Alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

4.5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition. Soit A une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors on appelle *rang de A* et on note $\text{rg}(A)$ la valeur $\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(A))$.

Remarque. On a de manière évidente : $\text{rg}(A) \leq \dim(E)$.

4.6 Théorème du rang

4.6.1 Rappel

Définition. Si E est de dimension finie et si $f \in L(E, F)$ alors on pose $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$. $\text{rg}(f)$ est appelé *rang de f* .

Remarque. Même si F n'est pas de dimension finie, $\text{Im}(f)$ l'est, on a même $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$.

4.6.2 Théorème du rang

Théorème . Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et F un K espace vectoriel. Soit $f \in L(E, F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

preuve :

4.6.3 Cas particuliers

Théorème . Si E et F sont de même dimension finie et si $f \in L(E, F)$. Alors :

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Remarque. Si $E = F$ est de dimension finie on a bien sûr ce résultat.

preuve : c'est un corollaire du théorème du rang

4.7 Hyperplan

Dans cette section E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. On pose $\dim(E) = n$.

4.7.1 Formes linéaires

Définition. On dit qu'une application linéaire de E dans K est une *forme linéaire sur E* .

Exemple. Les formes coordonnées.

Soit E un K espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

$$e_i^* : E \longrightarrow K$$

on pose $x \mapsto x_i$ ou $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Les e_i^* sont des formes linéaires.

4.7.2 Hyperplans

Définition. Si φ est une forme linéaire non nulle sur E , alors on dit que : $\ker(\varphi)$ est un *hyperplan de E* .

4.7.3 Propriétés

Lemme. Si F est un sous espace vectoriel de E , alors:

F est un hyperplan de $E \Leftrightarrow \dim(F) = \dim(E) - 1$

Remarque. En dimension 2, un hyperplan est une droite, en dimension 3, un hyperplan est un plan.

preuve :

Théorème . Soit H un hyperplan de E alors il existe D une droite vectorielle de E telle que : $E = H \oplus D$.

Remarque. Un hyperplan est un sous espace vectoriel admettant une droite vectorielle comme supplémentaire.

4.7.4 Equation d'un hyperplan

Soit H un hyperplan de E et soit ϕ une forme linéaire sur E telle que $H = \ker(\phi)$.

Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tout $x \in E$ on peut écrire $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans B .

$$\text{On a alors } \phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i).$$

On a alors :

$$x \text{ de coordonnées } (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ dans } B \text{ appartient à } H = \ker(\phi) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \phi(e_i) x_i = 0.$$

Cette dernière équation est appelée équation de H dans la base B .

Remarques. Tout hyperplan admet une équation dans B .

Ce résultat est déjà connue pour les équations de droites vectorielles dans le plan et pour les équation de plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ vectoriel.

Exemple. Equation dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Sommaire

1	Espaces vectoriels	1
1.1	Définitions	1
1.1.1	Loi interne et externe	1
1.1.2	Définition Générale	1
1.2	Sous espace vectoriel	1
1.3	Intersection	1
1.4	Exemple	2
2	Applications linéaires	2
2.1	Définition	2
2.2	Vocabulaire	2
2.3	Somme et composée d'applications linéaires	2
2.4	Noyau	2
2.4.1	Définition	2
2.4.2	Lemme	2
2.4.3	Lien avec l'injectivité	2
2.5	Image	2
2.5.1	Définition	2
2.5.2	Lemme	3
2.5.3	Lien avec la surjectivité	3
3	Famille finie de vecteurs	3
3.1	Combinaison linéaire	3
3.2	Familles génératrices	3
3.3	Famille libre, famille liée	3
3.4	Bases	3
4	Dimension finie	4
4.1	Définition	4
4.2	Sous espace vectoriel	4
4.3	Théorème de la base incomplète	4
4.4	Propriété	4
4.5	Rang d'une famille de vecteurs	4
4.6	Théorème du rang	4
4.6.1	Rappel	4
4.6.2	Théorème du rang	4
4.6.3	Cas particuliers	4
4.7	Hyperplan	5
4.7.1	Formes linéaires	5
4.7.2	Hyperplans	5
4.7.3	Propriétés	5
4.7.4	Equation d'un hyperplan	5