

Chapitre 5 : Calcul matriciel, algèbre linéaire et matrices

Remarque préliminaire : dans ce chapitre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Calcul matriciel

1.1 Rappels, notations

Définition. Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Alors on appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans K , toute famille d'éléments de K indexée par $\llbracket 1..n \rrbracket \times \llbracket 1..p \rrbracket$.

Remarques. On parle alors de matrice de taille (n, p) ou de taille $n \times p$.

On note $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1..n \rrbracket \times \llbracket 1..p \rrbracket}$ ou encore $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ou encore $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$

On dit que $a_{i,j}$ est le $(i, j)^{\text{ème}}$ terme de A .

Le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

Le vecteur ligne $(a_{i,1} \ \cdots \ a_{i,p})$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A .

Si $n = p$ on a une matrice carrée.

On note $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices n lignes, p colonnes.

Si $n = p$ on pose $M_{n,p}(K) = M_n(K)$.

1.2 Somme et multiplication par un scalaire

1.2.1 Somme

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(K)$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(K)$. Soit $\lambda \in K$. Alors on pose $C = A + \lambda B$ la matrice $C = (c_{i,j})$ de $M_{n,p}(K)$ définie par $\forall i \in \llbracket 1..n \rrbracket \ \forall j \in \llbracket 1..p \rrbracket$, $c_{i,j} = a_{i,j} + \lambda b_{i,j}$.

1.2.2 Structure vectorielle

Lemme. $(M_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un K espace vectoriel.

preuve : cf première année

1.3 Produit matriciel

1.3.1 Produit

Définition. Soit n, p, q trois entiers naturels non nul.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(K)$ Soit $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in M_{p,q}(K)$

Alors on définit le produit AB comme la matrice $C = (c_{i,j}) = AB \in M_{n,q}(K)$ ou

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \ \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \ c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarques. Attention à la compatibilité des formats.

Attention le produit n'est pas commutatif.

DESSIN :

1.3.2 Produit d'une matrice par un vecteur colonne ou un vecteur ligne

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exemple. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.4 Transposition

1.4.1 Définition, notation

Définition. Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $M_{n,p}(K)$ alors on appelle matrice transposée de A et on note A^T la matrice de $M_{p,n}(K)$ de (i,j) ^{ime} coefficient $a_{j,i}$.

Exemple. $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B^T =$

1.4.2 Matrices symétriques et antisymétriques

Définitions. Soit $A \in M_n(K)$.

Alors on dit que A est symétrique si et seulement si $A = A^T$.

Alors on dit que A est antisymétrique si et seulement si $A = -A^T$.

On note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(K)$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Remarque. Il faut, bien sûr, des matrices carrées.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ \pi & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ -2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique

1.4.3 Propriétés

Lemme. Soit $A \in M_{n,p}(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{cases} (A^T)^T = A \\ (AB)^T = B^T A^T \end{cases}$$

Soit $A, B \in M_{n,p}(K)$ alors : $(A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T$

preuve :

1.5 Rang d'une matrice

Définition. Soit $A \in M_{n,p}(K)$. Alors on définit le rang de A comme le rang de la famille des colonnes de A , dans $M_{n,1}(K)$.

Lemme. Soit A une matrice.

$rg(A) = rg(A^T)$ On peut ajouter à une ligne (ou une colonne) de A une combinaison linéaire des autres sans changer le rang de A .

On peut échanger deux lignes ou deux colonnes de A sans changer le rang de A .

On peut multiplier une ligne ou une colonne de A sans changer le rang de A .

1.6 Inverse d'une matrice

1.6.1 Définition

Soit $A \in M_n(K)$. Alors on dit que A est **inversible**

si et seulement si $\exists B \in M_n(K)$, $AB = BA = I_n$ avec $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarques. Si A est inversible on note A^{-1} l'inverse de A (B dans la définition ci-dessus).
On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$.
Cet ensemble est stable par inversion et produit (on dit que c'est un groupe dont I_n est l'élément neutre).
Rappel : $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$

1.6.2 Une méthode de calcul de l'inverse

On écrit le système $AX = Y$ avec X et Y deux vecteurs colonnes. On inverse le système et on en déduit A^{-1} .

Remarques. On peut aussi utiliser les opérations élémentaires. Passer par la comatrice est H.P.

1.6.3 Exemple

Calcul de l'inverse de $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2 Déterminant d'une matrice carrée

2.1 Définition

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ appelée **déterminant**, telle que :

1. le déterminant est **linéaire par rapport à chacune des colonnes**
2. l'échange de deux colonnes a pour effet de **multiplier le déterminant par -1**
3. le déterminant de la matrice unité I_n **vaut 1**

2.2 Notations

Si $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ on note $\det(A)$ ou encore $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ le déterminant de A .

2.3 Cas particulier des dimensions 2 et 3

Théorème . $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - dbi - ahf.$$

Remarques. Règle de Sarrus, uniquement dimension 3.
En dimension n la formule comporte $n!$ termes (24 en dimension 4 !!).

2.4 Opérations élémentaires

Lemme. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in K$ alors :

1. $\det(A^T) = \det(A)$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
4. l'échange de deux colonnes (ou de deux lignes) de A change **le signe du déterminant**
5. on peut ajouter à une colonne (ou une ligne) de A une combinaison linéaire des autres colonnes, **sans changer le déterminant de A .**
6. si A admet deux colonnes (ou deux lignes) égales alors $\det(A) = 0$
7. le déterminant est linéaire par rapport à **chaque colonne et par rapport à chaque ligne**

2.5 Matrices triangulaires

Lemme. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

Remarques. En appliquant le pivot de Gauss, on peut calculer le déterminant par opérations élémentaires (de manière algorithmique, donc informatique).

En particulier le déterminant d'une matrice diagonale est égale au produit de ses termes diagonaux.

preuve :

2.6 Inverse

Théorème . Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :

A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

De plus si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

preuve :

2.7 Déterminant par blocs

Théorème . Soit $A \in M_p(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$, $C \in M_q(K)$ alors : $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{M_{q,p}(K)} & C \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(C)$

2.8 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème . Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :
$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket , \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} \\ \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket , \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} \end{cases}$$

ou $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant à A sa $i^{\text{ième}}$ ligne et sa $j^{\text{jème}}$ colonne. Dans la première formule on dit que l'on développe $\det(A)$ par rapport à sa $i^{\text{ième}}$ ligne, dans la deuxième formule on dit que l'on développe $\det(A)$ par rapport à sa $j^{\text{jème}}$ colonne.

Exemple.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2.9 Complément : Déterminant de Vandermonde

2.9.1 Définition

Soit $n \geq 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$. Alors on appelle déterminant de Vandermonde le déterminant (d'une matrice de

$M_n(\mathbb{K})$) suivant :
$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

2.9.2 Théorème

Théorème : $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

2.9.3 Preuve

3 Interprétation vectorielle des matrices

3.1 Matrice d'un vecteur dans une base

Définition. Soit E un K espace vectoriel et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $x \in E$, alors on peut écrire $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Alors, $Mat_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelée matrice des coordonnées de x dans B .

Définition. Soit E un K espace vectoriel et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $S = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E .

Alors on appelle matrice de S dans B la matrice de $M_{p,n}(K)$ dont la j -ième colonne est $Mat_B(x_j)$.

Autrement dit : $Mat_B(S) = (x_{i,j})$ avec $x_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i$.

Exemple. Matrice de $(1 + X + X^2, 1 - X)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

3.2 Matrice d'une application linéaire

3.2.1 Cas général

Définition. Soit E un K espace vectoriel et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit F un K espace vectoriel et $B' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F .

Soit $\phi \in L(E, F)$.

Alors on appelle matrice $Mat_{B,B'}(\phi)$ de ϕ relativement à B et B' , la matrice de la famille $(\phi(e_j))_{1 \leq j \leq n}$ dans la base B' .

Remarques. On rappelle que ϕ est entièrement déterminé par l'image des vecteurs d'une base de B .

$$\begin{array}{ccc} L(E, F) & \longrightarrow & M_{p,n}(K) \\ \phi & \mapsto & Mat_{B,B'}(\phi) \end{array} \text{ est un isomorphisme d'espace vectoriel.}$$

On a donc $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket f(e_j) = \sum_{i=1}^p m_{i,j} f_i$ avec $Mat_{B,B'}(\phi) = (m_{i,j})$

Exemple. Matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de $\phi : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x - y - 2z)$

3.2.2 Cas particulier

Si $E = F$ et $B = B'$ alors ϕ est un endomorphisme et on note $Mat_{B,B'}(\phi) = Mat_B(\phi)$

Exemple. Matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de $\phi : P \mapsto Q$ avec $Q(X) = XP'(X + 1)$

3.3 Utilisation du produit matriciel

3.3.1 Premier théorème

Théorème . Soit E un K espace vectoriel et B une base de E .

Soit F un K espace vectoriel et B' une base de F .

Soit $\phi \in L(E, F)$.

Alors, pour tout $x \in E$ on a : $Mat_{B'}(\phi(x)) = Mat_{B,B'}(\phi) Mat_B(x)$

3.3.2 Deuxième théorème

Théorème . Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et B une base de E .

Soit F un K espace vectoriel de dimension finie et B' une base de F .

Soit G un K espace vectoriel de dimension finie et B'' une base de G .

Soit $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$.

Alors on a : $Mat_{B,B''}(g \circ f) = Mat_{B',B''}(g) Mat_{B,B'}(f)$

Remarque. Dans le cas particulier où $E = F = G$ et $B = B' = B''$ alors : $Mat_B(g \circ f) = Mat_B(g) Mat_B(f)$

3.4 Changement de bases

3.4.1 Matrices de passage

Définition. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie. Soit B et B' deux bases de E . Alors on appelle *matrice de passage* de la base B à la base B' la matrice $\text{Mat}_B(B')$. On note $P_B^{B'}$ cette matrice

Remarques. On a : $P_B^{B'} = \text{Mat}_B(B') = \text{Mat}_{B',B}(\text{Id}_E)$, $P_B^{B'}$ est inversible et $(P_B^{B'})^{-1} = P_{B'}^B$.
Si B , B' et B'' sont trois bases de E alors : $P_B^{B''} = P_B^{B'} P_{B'}^{B''}$

3.5 Formules de changements de bases

3.5.1 Formule de changement de base pour un vecteur

Lemme. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et soit B et B' deux bases de E .
Alors pour tout vecteur x de E : $\text{Mat}_B(x) = P_B^{B'} \text{Mat}_{B'}(x)$

3.5.2 Formule de changement de base pour une application linéaire

Lemme. Soit E et F deux K espace vectoriel de dimension finie, soit B et B' deux bases de E , soit C et C' deux bases de F . Soit $\phi \in L(E, F)$. Alors $\text{Mat}_{B,C}(\phi) = P_C^{C'} \text{Mat}_{B',C'}(\phi) (P_B^{B'})^{-1}$

3.5.3 Formule de changement de base pour un endomorphisme

Lemme. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, soit B et B' deux bases de E .
Soit $\phi \in L(E)$. Alors $\text{Mat}_B(\phi) = P_B^{B'} \text{Mat}_{B'}(\phi) (P_B^{B'})^{-1}$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{3}, \frac{2x+2y}{3}\right)$
Matrices dans la base canonique et dans la base $((1, 1), (1, -1))$

4 Utilisation du déterminant

4.1 Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base

4.1.1 Définition

Définition. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et S une famille de $\dim(E)$ vecteurs de E .
Alors on appelle *déterminant de S relativement à B* la valeur suivante : $\det_B(S) = \det(\text{Mat}_B(S))$

4.1.2 Propriétés

Lemme. S est une base $\Leftrightarrow \det_B(S) \neq 0$

4.2 Déterminant d'un endomorphisme

4.2.1 Définition

Définition. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $\phi \in L(E)$.
On appelle *déterminant de ϕ* la valeur suivante $\det(\phi) = \det(\text{Mat}_B(\phi))$ avec B une base quelconque de E .

Remarque. Bien sûr, la valeur de $\det(\phi)$ est indépendante du choix de B et résulte de la formule de changement de bases pour un endomorphisme et du fait que 2 matrices semblables ont même déterminant.

4.2.2 Propriétés

Lemme. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in L(E)$ et $\lambda \in K$.

Alors :
$$\begin{cases} \det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f \text{ est un automorphisme} \\ \det(f \circ g) = \det(f) \det(g) \\ \det(\lambda f) = \lambda^{\dim(E)} \det(f) \end{cases}$$

Remarques. Si f est bijective $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$
Si B est une base de E et S une famille de $\dim(E)$ vecteurs de E alors $\det_B(f(S)) = \det(f) \det_B(S)$, $\det(f)$ peut alors être vu comme un coefficient de dilatation.

Sommaire

1	Calcul matriciel	1
1.1	Rappels, notations	1
1.2	Somme et multiplication par un scalaire	1
1.2.1	Somme	1
1.2.2	Structure vectorielle	1
1.3	Produit matriciel	1
1.3.1	Produit	1
1.3.2	Produit d'une matrice par un vecteur colonne ou un vecteur ligne	2
1.4	Transposition	2
1.4.1	Définition, notation	2
1.4.2	Matrices symétriques et antisymétriques	2
1.4.3	Propriétés	2
1.5	Rang d'une matrice	2
1.6	Inverse d'une matrice	2
1.6.1	Définition	2
1.6.2	Une méthode de calcul de l'inverse	3
1.6.3	Exemple	3
2	Déterminant d'une matrice carrée	3
2.1	Définition	3
2.2	Notations	3
2.3	Cas particulier des dimensions 2 et 3	3
2.4	Opérations élémentaires	3
2.5	Matrices triangulaires	4
2.6	Inverse	4
2.7	Déterminant par blocs	4
2.8	Développement par rapport à une ligne ou une colonne	4
2.9	Complément : Déterminant de Vandermonde	4
2.9.1	Définition	4
2.9.2	Théorème	4
2.9.3	Preuve	4
3	Interprétation vectorielle des matrices	5
3.1	Matrice d'un vecteur dans une base	5
3.2	Matrice d'une application linéaire	5
3.2.1	Cas général	5
3.2.2	Cas particulier	5
3.3	Utilisation du produit matriciel	5
3.3.1	Premier théorème	5
3.3.2	Deuxième théorème	5
3.4	Changement de bases	6
3.4.1	Matrices de passage	6
3.5	Formules de changements de bases	6
3.5.1	Formule de changement de base pour un vecteur	6
3.5.2	Formule de changement de base pour une application linéaire	6
3.5.3	Formule de changement de base pour un endomorphisme	6
4	Utilisation du déterminant	6
4.1	Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base	6
4.1.1	Définition	6
4.1.2	Propriétés	6
4.2	Déterminant d'un endomorphisme	6
4.2.1	Définition	6
4.2.2	Propriétés	6