

Chapitre 4 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé exercice 4.1

Montrer que $F = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) , \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Correction

On sait que $E = C^\infty(\mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Comme $F \subset E$ on va montrer que F est un sous espace vectoriel de E .

Déjà F est non vide puisque la fonction nulle est dans F .

Deuxième point, soit $(f, g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } & \int_0^1 (f + \lambda g)(t)dt \\ &= \int_0^1 (f(t) + \lambda g(t))dt \\ &= \int_0^1 f(t)dt + \lambda \int_0^1 g(t)dt \\ &= 0 + \lambda 0 \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont dans } F \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc $f + \lambda g \in F$

$$\text{On a : } \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall (f, g) \in F^2 \forall \lambda \in \mathbb{R}, f + \lambda g \in F \end{cases}$$

F est donc non vide et stable par combinaison linéaire. D'après le cours F est un sous espace vectoriel de E .

Comme un sous espace vectoriel est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel alors F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Bilan : $F = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) , \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

$$\begin{array}{lll} \phi & : & E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{Remarque : Autre méthode. On pose :} & & f \longmapsto \int_0^1 f(t)dt \end{array}$$

Grâce à la linéarité de l'intégrale on a que ϕ est une forme linéaire.

On remarque que : $F = \ker(\Phi)$ et donc F est un sous espace vectoriel de E et donc un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Enoncé exercice 4.2

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} f_1(x) = x \\ f_2(x) = \exp(x) \\ f_3(x) = \cos(x) \end{cases}$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Correction

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \theta$ (avec θ la fonction nulle sur $\mathbb{R}$)

Alors, pour x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 x + \lambda_2 e^x + \lambda_3 \cos(x) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2(1 + x \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + \lambda_3(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_2 - \lambda_3)\frac{x^2}{2} + o(x^2) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} &\text{ par unicité du DL} \\ \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

On a donc, d'après la définition du cours : (f_1, f_2, f_3) libre.

Enoncé exercice 4.3

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose $\forall P \in E : f(P) = (X+1)P' - 2P$

- a) Montrer que f est un endomorphisme de E .
 - b) Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.
-

Correction

a) Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par linéarité de la dérivation :

$f(P + \lambda Q) = (X+1)(P + \lambda Q)' - 2(P + \lambda Q) = (X+1)P' - 2P + \lambda((X+1)Q' - 2Q) = f(P) + \lambda f(Q)$
On a donc bien f linéaire, comme $d((X+1)P') \leq d(P)$ et $d(-2P) \leq d(P)$ alors $d(f(P)) \leq d(P)$ et on a donc bien $f(E) \subset E$.

Bilan : f est un endomorphisme de E

$$\begin{aligned}
& \text{b) } P = a + bX + cX^2 \in \ker(f) \\
& \Leftrightarrow f(P) = 0_E \\
& \Leftrightarrow (X+1)(b+2cX) - 2(a+bX+cX^2) = 0_E \\
& \Leftrightarrow (b-2a) + (b+2c-2b)X + (2c-2c)X^2 = 0_E \text{ par identification} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} b-2a=0 \\ 2c-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a \\ c=a \end{cases} \Leftrightarrow P = a(1+2X+X^2) = a(X+1)^2
\end{aligned}$$

On a donc $\ker(f) = \text{Vect}((X+1)^2)$.

On remarque (calcul ci-dessus) que : $f(a+bX+cX^2) = (b-2a) + (2c-b)X \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_1[X]$
Comme $f \in L(E)$, par le théorème du rang : $\dim(E) = 3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$. Comme $\dim(\ker(f)) = 1$, on en déduit $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. Avec l'inclusion ci-dessus et l'égalité des dimensions on en déduit $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.

Bilan : $\boxed{\ker(f) = \text{Vect}((X+1)^2) \text{ et } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]}$

Enoncé exercice 4.4

Soit f un endomorphisme d'un K espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$. On note $f^2 = f \circ f$
a) Montrer que : $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ et $\ker(f) \subset \ker(f^2)$
b) Montrer que : $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f) \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$

Correction

a) Soit $x \in E$. Alors :
 $x \in \text{Im}(f^2) \Rightarrow \exists z \in E, x = f(f(z)) \Rightarrow \exists z' \in E, x = f(z')$ avec $z' = f(z)$ et donc $x \in \text{Im}(f)$
On a bien $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

Soit $x \in E$. Alors :
 $x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0_E \Rightarrow f^2(x) = 0_E \Rightarrow x \in \ker(f^2)$
On a bien $\ker(f) \subset \ker(f^2)$

On a donc $\boxed{\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f) \text{ et } \ker(f) \subset \ker(f^2)}$

b) Le théorème du rang appliqué à f et f^2 donne : $\begin{cases} \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \\ \dim(E) = \dim(\ker(f^2)) + \dim(\text{Im}(f^2)) \end{cases}$ et
donc $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f^2)) + \dim(\text{Im}(f^2)) \Leftrightarrow (1)$

Alors : $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(\text{Im}(f))$
puisque $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$
 $\Leftrightarrow \dim(\ker(f^2)) = \dim(\ker(f))$
avec la relation (1)
 $\Leftrightarrow \ker(f^2) = \ker(f)$
puisque $\ker(f) \subset \ker(f^2)$

On a donc bien : $\boxed{\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f) \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2)}$

Enoncé exercice 4.5

Soit n un entier vérifiant $n \geq 2$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.

On pose $\forall P \in E$, $\varphi(P) = \int_0^1 f(t)dt$

- a) Montrer que $\ker(\varphi)$ est un hyperplan.
 - b) Donner une équation cartésienne de $\ker(\varphi)$ dans la base canonique de E .
-

Correction

a) φ est une forme linéaire non nulle, donc par définition $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E .

b) Si on note $(a_0, \dots, a_n)$ les coordonnées d'un polynôme P de E , alors : $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et

$$\varphi(P) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 a_k t^k dt = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} a_k$$

Une équation de $\ker(\varphi)$ dans la base canonique est donc $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} a_k = 0$

Enoncé exercice 4.6 (★)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit H et H' deux hyperplan distincts de E . Déterminer la dimension de $H \cap H'$.

Correction

Posons $F = H \cap H'$ alors F est un sous-espace vectoriel de E

Supposons par l'absurde que $H + H' = H$. Alors on aurait $H' \subset H + H' = H$ et donc $H = H'$ ce qui n'est pas le cas.

On a donc $H \subset H + H'$ et cette inclusion est strict. On en déduit $\dim(H + H') \geq \dim(H) = n - 1$ et comme $\dim(H + H') \leq n$ alors $\dim(H + H') = n$

A l'aide de la formule de Grasmann on a : $\dim(F) = \dim(H \cap H') = \dim(H) + \dim(H') - \dim(H \cup H') = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2$

On a donc $\dim(H \cap H') = n - 2$