

Feuille d'exercices n°9 : chap. 3

Exercice 85. Montrer la convergence de $J = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^4} dt$ et calculer J .

Exercice 86. a) Pour $a > 0$, calculer $A(a) = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(t)}{t} dt$ et déterminer $\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a)$

b) Déterminer la nature de $A = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$

Exercice 87. Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes et calculer celles qui sont convergentes.

$$\begin{aligned} A &= \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-3x+2} dx & B &= \int_0^{+\infty} \frac{2dx}{x(x+2)} & C &= \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^3} dt & D &= \int_0^{+\infty} t \exp(-t^2) dt & E &= \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt \\ F &= \int_2^{+\infty} \frac{2dx}{x(x-1)} & G &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt & H &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt & I &= \int_{\pi}^{+\infty} \frac{t \cos(t) - 2 \sin(t)}{t^3} dt & J &= \int_0^{+\infty} \frac{1-x}{1+x+x^2+x^3} dx \end{aligned}$$

Exercice 88. a) Montrer que : $I_0 = \int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente et calculer I_0

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad I_k = \int_0^1 t^k \ln(t) dt$ est convergente et calculer I_k

Exercice 89. On pose $\forall x \in]0; \frac{2}{\pi}[\quad f(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$

a) Sur la calculatrice, tracer la représentation graphique de f

b) Dériver $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ sur $]0; \frac{2}{\pi}[$

c) Montrer que $\int_0^{\frac{2}{\pi}} f(x) dx$ est convergente et calculer cette intégrale.

Exercice 90. Montrer que $A = \int_0^{+\infty} \sin(2t) \exp(-t) dt$ est convergente et calculer A

Exercice 91. Montrer que : $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{1+t^2} dt$ est convergente et donner un encadrement de I

Exercice 92. (★)

a) Montrer que : $\int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt$ est convergente.

b) En déduire l'existence de $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} [(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}) - \ln(n)]$

Exercice 93. (★(5/2))

Montrer la convergence et calculer : $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\lfloor \frac{t}{\pi} \rfloor} dt$