

Feuille d'exercices n°12 : chap. 4,5,6

Exercice 110. On note E l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.

On pose : $F = \{f \in E, f(\frac{1}{2}) = 0\}$ $G = \{f \in E, f(0) + f(1) = 0\}$ $H = \{f \in E, f(0) + f(1) = 1\}$

$L = \{f \in E, \exists c \in [0, 1] f(c) = 0\}$

$M = \{f \in E, f \text{ est intégrable sur } [0, 1]\}$

Parmi les ensembles ci-dessus, lesquels sont des espaces vectoriel ?

Exercice 111. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \\ x + z - 2t = 0 \end{cases}\}$

Montrer que F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Exercice 112. $(\star)$ Soit E un K espace vectoriel, F et G deux sous espace vectoriel de E .

On suppose que $E = F \cup G$. Montrer alors que $F = E$ ou $G = E$.

Exercice 113. On note E l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.

On pose $F = \{f \in E, f^2 \text{ est intégrable sur } [0, 1]\}$

a) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

b) Montrer que F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Remarque : en général, on note $F = L^2([0, 1], \mathbb{R})$

Exercice 114. Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée et trouver une combinaison linéaire (à coefficients non tous nuls) liant ces vecteurs.

b) Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$ est libre.

Exercice 115. On pose $\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = \exp(x) \\ f_3(x) = \sin(x) \\ f_4(x) = \cos(x) \end{cases}$

Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 116. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = \cos(x) \\ f_3(x) = \cos(2x) \\ f_4(x) = \cos^2(x) \end{cases}$

a) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

b) Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille liée de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 117. On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \exp(nx)$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ la famille $(f_k)_{k \in [0; n]}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$