

Feuille d'exercices n°13 : chap. 4,5,6

Exercice 118. $(\star)$ On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \cos(nx)$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ la famille $(f_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 119. Soit f l'application définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par $\forall P \in E \quad f(P) = P - X^2 P''$
a) Montrer que f est un endomorphisme de E .
b) Montrer que f est une symétrie.

Exercice 120. Soit $n \geq 3$ et f l'application définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ dans E définie par $\forall P \in E \quad f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par $R = X^2 - 3X + 7$
a) Montrer que f est un endomorphisme de E .
b) Montrer que f est une projection.

Exercice 121. $(\star)$ Soient E et F deux espaces vectoriels et $u, v \in L(E, F)$. Montrer que :
 $\ker(u) \subset \ker(v) \Leftrightarrow \exists f \in L(F) \quad , \quad v = f \circ u$

Exercice 122. $(\star)$ Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur F et G pour qu'il existe $u \in L(E)$ tel que $\ker(u) = F$ et $\operatorname{Im}(u) = G$.

Exercice 123. $(\star)$ Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$ contient au moins une matrice inversible.

Exercice 124. $(\star)$ Soit E un K espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.
Soit $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E .
Montrer que : $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p) \in \llbracket n - p; n - 1 \rrbracket$

Exercice 125. Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 126. Déterminer suivant $a \in \mathbb{R}$ le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 127. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

- a) Calculer $A^T A$, AA^T et A^2
b) A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}
c) Calculer $A^{64216541355687}$

Exercice 128. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique et antisymétrique. Que dire de A ?

Exercice 129. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ecrire A comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.