

Feuille d'exercices n°14 : chap. 4,5,6

Exercice 130. Inverser les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 131. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = A - D$

a) Calculer N^k pour $k \in \mathbb{N}$

b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 132. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Montrer que : $A^2 + A - 6I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, \quad A^n = a_n A + b_n I_2$

En particulier donner les valeurs de a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 et b_2

On donnera aussi deux relations de récurrences liant a_{n+1} et b_{n+1} à a_n et b_n

c) On pose $A_n = 2a_n + b_n$ et $B_n = -3a_n + b_n$

Montrer que l'on définit ainsi deux suites géométriques.

d) En déduire a_n et b_n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 133. Soit $n \geq 2$ et U la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1.

a) Calculer U^k pour tout $k \in \mathbb{N}$

b) Calculer $(I_n + U)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

Exercice 134. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $A^2 - 4A - 5I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$

b) Déterminer, en fonction de n , le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X - 5$

c) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n .

Exercice 135. Calculer les déterminants suivants : $a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

et $c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$