

## Feuille d'exercices n°15 : chap. 4,5,6

**Exercice 136.** En utilisant la ruse plutôt que Sarrus, donner sous forme factorisée l'expression

$$\text{de } A = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \text{ et de } B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

**Exercice 137.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0_{M_n(\mathbb{R})} & I_n \\ -I_n & 0_{M_n(\mathbb{R})} \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$  Déterminer  $\det(A)$

**Exercice 138.**  $(\star)$  Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$ .  
Montrer que  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$

**Exercice 139.** Soit  $M$  une matrice antisymétrique de  $M_{2n+1}(\mathbb{R})$ . Calculer  $\det(M)$ .

**Exercice 140.** Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $a \neq b$ . Soit  $D = \begin{pmatrix} c & b & \dots & b \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$  avec  $n \geq 2$

Soit  $U$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  ne contenant que des 1.

On pose  $\forall h \in \mathbb{R} \quad P(h) = \det(D + hU)$

a) Montrer que  $P \in \mathbb{R}_1[X]$

b) Calculer  $P(-a)$  et  $P(-b)$

c) Calculer  $\det(D)$ .

d) Calculer  $\det(D)$  dans le cas  $a = b$

**Exercice 141.**  $(\star)$  On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \delta_n = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  (déterminant d'une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$ )

Déterminer  $\delta_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 142.** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (3x + 2y, 2x + y)$$

a) Montrer que  $f$  est une application linéaire et déterminer la matrice de  $f$  relativement à la base canonique  $B$  de  $\mathbb{R}^2$

b) Montrer que  $f$  est inversible et déterminer  $f^{-1}$  sous la même forme que la définition de  $f$ .

**Exercice 143.** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Déterminer  $\ker(A)$  et  $\text{Im}(A)$