

Feuille d'exercices n°16 : chap. 4,5,6

Exercice 144. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

On définit u l'application de E dans lui-même par $u(P) = P + (1 - X)P'$

- a) Montrer que u est un endomorphisme de E
- b) Déterminer la matrice de u relativement à B la base canonique de E
- c) Déterminer une base de $\text{Im}(u)$
- d) Déterminer une base de $\text{ker}(u)$
- e) Montrer que $\text{ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice 145. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit φ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ admettant A comme matrice relativement à la base canonique $B = (i, j)$.

On pose $u = 3i - j$ et $v = 3i + j$.

- a) Montrer que $B' = (u, v)$ est une base de E .
- b) Déterminer la matrice de φ relativement à B' .
- c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 146. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et B la base canonique de E .

On pose $\forall P \in E \quad \phi(P)(X) = P(X + 1)$

- a) Déterminer A la matrice de ϕ relativement à B
- b) Déterminer A^{-1}

Exercice 147. a) Trouver une application linéaire injective mais non surjective.

b) Trouver une application linéaire surjective mais non injective.

Exercice 148. Soit $N \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = (0)$ Montrer que $I_3 + N$ est inversible

Exercice 149. (★)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

Montrer que : $A^2 = \text{tr}(A)A$

Donner une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 150. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $E = M_2(\mathbb{R})$ par

$\forall M \in M_2(\mathbb{R}) \quad f(M) = AM$

- a) Montrer que f est un endomorphisme de E .
- b) Déterminer une base de $\text{ker}(f)$
- c) f est-il surjectif ?
- d) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- e) A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = \text{ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?