

## Feuille d'exercices n°17 : chap. 4,5,6

**Exercice 151.** Déterminer suivant  $a$  le rang de 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a-1 & 2a+1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

**Exercice 152.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$

Déterminer suivant  $a$  le rang de  $A$

**Exercice 153.** Soit la matrice  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Soit  $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = M\}$

a) Montrer que  $F$  est un espace vectoriel et que  $(1, J, J^2)$  est une base de  $F$

b) On pose  $c(J) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MJ = JM\}$ . Déterminer  $c(J)$

**Exercice 154.** Soit  $E = M_n(\mathbb{R})$  et  $F = \ker(\text{tr})$  ( $\text{tr}$  est la forme linéaire trace).

On pose  $\forall M \in E \quad \phi(M) = \text{tr}(M)I_n + M$

a) Quelle est la dimension de  $F$  ?

b) Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $E$ .

c) Déterminer  $\ker(\phi)$

d) Soit  $M \in F$ , calculer  $\phi(M)$

e) Montrer que :  $E = F \oplus \text{Vect}(I_n)$

f) Montrer que  $\phi$  admet pour matrice une matrice diagonale dans une certaine base.

En déduire le rang et la trace de  $\phi$ .

**Exercice 155.** Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  admettant  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$  comme

matrice relativement à la base canonique de  $E$

a) Montrer que  $f$  est une symétrie de  $E$

b) Déterminer les caractéristiques de  $f$  (c'est-à-dire  $\ker(f - \text{Id})$  et  $\ker(f + \text{Id})$ )

**Exercice 156.** Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  vérifiant :

$$f \circ f - 2f - 3\text{Id}_E = 0_{L(E)}$$

On pose  $A = \ker(f + \text{Id}_E)$  et  $B = \ker(f - 3\text{Id}_E)$ .

a) Montrer que  $A$  et  $B$  sont stables par  $f$

b) Montrer que :  $E = A \oplus B$

c) Si  $E$  est de dimension 3. Quelles sont les valeurs possibles pour  $\det(f)$  ?

**Exercice 157.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension 3.

On suppose que  $f \neq 0_{L(E)}$  et que  $f \circ f = 0_{L(E)}$ .

a) Déterminer une inclusion entre  $\text{Im}(f)$  et  $\ker(f)$

b) Déterminer le rang de  $f$ .

c) Montrer qu'il existe une base  $B$  de  $E$  telle que  $M_B(f)$ , la matrice relativement à  $B$  de  $f$ , ait 8 coefficients nuls.