

Feuille d'exercices n°18 : chap. 4,5,6

Exercice 158. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de $M_n(\mathbb{R})$ avec $A \in M_p(\mathbb{R})$, $D \in M_q(\mathbb{R})$.

a) Quel est le format de D ?

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A, B, D pour que M soit inversible.

Exercice 159. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$

Montrer que : $\ker(f) = \ker(f \circ f) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f \circ f)$

Exercice 160. Soit E un K espace vectoriel et $E_1, E_2, \dots, E_p$ p sous-espace vectoriel de E .

Montrer que : $E_1 + E_2 + \dots + E_p$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant $E_1, E_2, \dots, E_p$.

Exercice 161. (★)

Soit E un K espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant $u^{n-1} \neq 0_{L(E)}$ et $u^n = 0_{L(E)}$.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E .

b) Calculer $\det(u)$ et $\operatorname{tr}(u)$.

c) Montrer que $v = \operatorname{Id}_E + u$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 162. (★)

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$

Montrer que : $\dim(\ker(u)) \leq \dim(\ker(u^2)) \leq 2\dim(\ker(u))$