

A rendre le jeudi 8 octobre 2026

Devoir à la maison n°3 de Mathématiques : BONUS

Partie II - Montée d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$

Soit n un entier naturel non nul. On appelle *montée* d'une liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ d'entiers naturels **distincts deux à deux** toute sous-liste $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_q)$ avec $p \leq q$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} p = 1 & \text{ou} & a_{p-1} > a_p \\ \text{et} & a_p < a_{p+1} < \dots < a_q & \text{si} & p < q \\ \text{et} & q = n & \text{ou} & a_q > a_{q+1} \end{cases}$$

On note $M(a)$ le nombre de montées de la liste a . Par exemple, les montées de la liste $a = (2, 5, 7, 6, 1, 4, 3, 8)$ sont $(2, 5, 7)$, (6) , $(1, 4)$, $(3, 8)$ et donc $M(a) = 4$.

On définit de même la notion de *descente* d'une liste a d'entiers naturels distincts deux à deux et son nombre de descentes $D(a)$. Par exemple, les descentes de la liste $a = (2, 5, 7, 6, 1, 4, 3, 8)$ sont (2) , (5) , $(7, 6, 1)$, $(4, 3)$ et (8) , d'où $D(a) = 5$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'ensemble des n -listes d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ **distincts deux à deux**.

Il est clair que, pour toute liste a de S_n , on a $1 \leq M(a) \leq n$ et $1 \leq D(a) \leq n$.

Enfin, pour tout entier naturel k , on note $E_n(k)$ le nombre de listes a de S_n ayant exactement k montées. Autrement dit, $E_n(k) = \text{Card}\{a \in S_n \mid M(a) = k\}$. On a donc $E_n(0) = 0$ ainsi que $E_n(k) = 0$ pour tout $k > n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer les valeurs de $E_n(1)$ et $E_n(n)$.

(b) Soit k un entier fixé compris entre 1 et n .

Donner un exemple de liste a de S_n pour laquelle $M(a) = k$.

2. Déterminer, pour tout entier naturel non nul n et toute liste a de S_n , la valeur de la quantité $M(a) + D(a)$.

En notant, pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, s_i la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de $(a_1, \dots, a_i)$, on évaluera en fonction du nombre s_i , la somme s_{i+1} des nombres de montées et de descentes de $(a_1, \dots, a_{i+1})$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de S_n , on associe la liste

$$\Psi(a) = (n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_n).$$

(a) Vérifier que l'application Ψ est une bijection de S_n sur S_n .

(b) En déduire que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_n(k) = E_n(n+1-k)$.

4. Calcul de $E_n(2)$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- (a) Quel est le nombre de couples (A, B) de parties **non vides** de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que

$$A \cup B = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset \quad ?$$

- (b) Établir que : $E_n(2) = 2^n - (n + 1)$.

5. *Une relation de récurrence*

Soit n un entier naturel non nul. À toute liste $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ de S_{n+1} , on associe la liste $\varphi_n(a)$ de S_n obtenue en ôtant l'élément $n+1$ de la liste a . Par exemple, dans le cas particulier où $n = 5$, si $a = (3, 4, 1, 5, 6, 2)$, alors $\varphi_5(a) = (3, 4, 1, 5, 2)$ et si $a = (6, 3, 4, 1, 5, 2)$, alors $\varphi_5(a) = (3, 4, 1, 5, 2)$.

- (a) Soit $b = (a_1, \dots, a_n)$ un élément de S_n . Comment s'écrivent les éléments de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?
- (b) Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $b \in S_n$ tels que $M(b) = k$. Quels sont les valeurs possibles de $M(a)$ pour un élément a de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?
- (c) Établir, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k).$$

Vérifier que cette formule tient également pour $k = 0$ et pour $k > n$.

- (d) Donner, en détaillant le calcul de $E_5(3)$, les valeurs de $E_n(k)$ pour tous les couples d'entiers (n, k) tels que $1 \leq k \leq n \leq 5$. On consignera les résultats dans un tableau, n étant l'indice de ligne et k l'indice de colonne.

6. *La formule de Worpitzky*

Établir, pour tout n entier naturel non nul et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité

$$E_n(k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n.$$

On raisonnera par récurrence sur l'entier n .

7. *Une égalité miraculeuse*

Justifier, pour tout n entier naturel non nul, l'égalité

$$E_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi} (2n-1)! \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt.$$