

Correction TD4 exercice 4 Fonte d un glaçon

sphère de rayon r' (il n'y a pas d'accumulation d'énergie entre r et r' en régime stationnaire, toute l'énergie qui entre doit aussi sortir). Ainsi le flux thermique sortant d'une sphère est

$$\mathcal{P} = \text{Cste} = \oint_S \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} = 4\pi r^2 j_Q(r) \quad \text{donc} \quad j_Q(r) = \frac{\mathcal{P}}{4\pi r^2}$$



Par ailleurs la loi de Fourier en coordonnées sphériques donne $j_Q(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}$.
On calcule alors

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\mathcal{P}}{4\pi r^2 \lambda} \quad \text{soit} \quad T(r) = \frac{\mathcal{P}}{4\pi r \lambda} + A \quad \text{avec} \quad A \text{ une constante d'intégration.}$$

Enfin, on a les conditions aux limites $T(a) = T_1$ et $T(r \rightarrow \infty) = T_2$. En utilisant la première, on trouve

$$A = T_1 - \frac{\mathcal{P}}{4\pi a \lambda} \quad \text{soit} \quad T(r) = T_1 + \frac{\mathcal{P}}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

et pour finir le flux thermique s'obtient par la deuxième

$$T_2 = T_1 - \frac{\mathcal{P}}{4\pi \lambda a} \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{P} = 4\pi \lambda a (T_1 - T_2)}$$

Le flux est bien négatif (donc entrant) si $T_2 > T_1$. L'eau environnante réchauffe le glaçon. Finalement

$$\boxed{T(r) = T_2 - \frac{(T_2 - T_1) a}{r}}$$

2) On considère comme système le glaçon de rayon $a(t)$ et de température T_1 (la température est constante lors de la fusion). Entre t et $t + dt$, réchauffé par l'eau environnante, il voit une partie dm (< 0 car la masse de glace diminue) de sa masse se liquéfier. La pression de l'eau environnante ne varie pas, si bien que le processus de changement d'état est monobare. Le premier principe s'écrit donc

$$dH = \delta Q$$

Le changement d'état de la masse dm correspond à une variation d'enthalpie

$$dH = -L_f dm$$

Le signe « - » est présent pour tenir compte du fait que dm est la variation de la masse de glace, donc elle est négative alors que l'enthalpie reçue est positive.

Par ailleurs, dans le cadre de l'approximation d'un régime quasi-stationnaire, on suppose que l'expression de la puissance obtenue précédemment dans le cas d'un régime stationnaire est encore valable pour une évolution temporelle lente. On a ainsi

$$\delta Q = -\mathcal{P} dt = -4\pi \lambda a (T_1 - T_2) dt$$

Le signe « - » est présent pour tenir compte du fait que δQ est le transfert thermique reçu, tandis que $\mathcal{P}$ est le flux thermique sortant. L'évolution de la masse du glaçon vérifie par conséquent

$$-L_f \frac{dm}{dt} = -4\pi \lambda a (T_1 - T_2) \quad \text{soit} \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{4\pi \lambda a (T_2 - T_1)}{L_f}$$

Enfin, le glaçon est sphérique et homogène donc

$$m(t) = \frac{4}{3} \pi \varrho a^3(t) \quad \text{soit} \quad \frac{dm}{dt} = 4 \pi \varrho a^2 \frac{da}{dt}$$

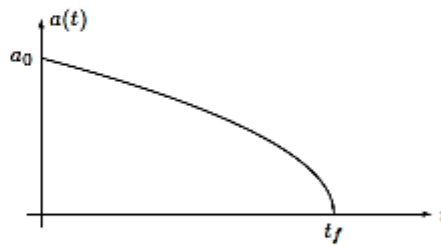
Finalement

$$\frac{da}{dt} = - \frac{\lambda (T_2 - T_1)}{\varrho L_f a}$$

qui se résout par séparation des variables

$$a^2(t) - a_0^2 = - \frac{2 \lambda (T_2 - T_1) t}{\varrho L_f} \quad \text{soit} \quad a(t) = \sqrt{a_0^2 - \frac{2 \lambda (T_2 - T_1) t}{\varrho L_f}}$$

Ci-dessous une représentation graphique



3) Le glaçon a complètement fondu lorsque $a = 0$ soit

$$t_f = \frac{\varrho L_f a_0^2}{2 \lambda (T_2 - T_1)}$$

L'application numérique donne

$$t_f \approx 47 \text{ min}$$

Cette valeur légèrement exagérée provient du fait qu'on a pris en compte seulement le processus de diffusion pour fournir de l'énergie au glaçon. En pratique, la variation de température de l'eau environnante provoque de la convection, bien plus efficace pour assurer les transferts thermiques.