

JOURNEE "lycée fermé" : 5 octobre 2026

TD du matin

Intégrale de "Futuna"

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^n(t)} dt$

Remarque : on note $(ch(t))^n = ch^n(t)$

1°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, I_n est une intégrale convergente.

2°) a) Calculer I_1 (on pourra effectuer le changement de variable $u = e^t$).

2°) b) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$ $th'(t) = \frac{1}{ch^2(t)}$ et en déduire la valeur de I_2 .

3°) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4°) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+2} = \frac{n}{n+1} I_n$

5°) Montrer que, au voisinage de $+\infty$: $I_{n+1} \sim I_n$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = nI_n I_{n+1}$

6°) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

7°) Déterminer un équivalent simple de I_n et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

Exercice d'algèbre linéaire

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$

Montrer que : $\dim(\ker(u)) \leq \dim(\ker(u^2)) \leq 2\dim(\ker(u))$

Indication : on pourra poser $v = u|_{\ker(u)}$ la restriction de u à $\ker(u)$

TD de l'après-midi

Calcul de l'intégrale de Dirichlet : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Pour tout réel t et tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$

1°) a) Pour $t \in]0; 2\pi[$, calculer : $\sum_{k=1}^n e^{ikt}$ et en déduire que : $S_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}$ pour $t \in]0, 2\pi[$

1°) b) Montrer que $A = \int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} dt$ existe et calculer sa valeur.

On définit la fonction f sur $[0; \pi]$ par :
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

2°) a) Montrer que f est de classe C^0 sur $[0; \pi]$.

2°) b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; \pi]$ et calculer $f'(t)$ sur cet intervalle.

2°) c) Montrer que f est de classe C^1 sur $[0; \pi]$.

2°) d) Montrer qu'il existe un réel M tel que : $\forall t \in [0; \pi] \quad |f'(t)| \leq M$

3°) a) Montrer que : $\int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos((n + \frac{1}{2})t) dt$

3°) b) Montrer que : $\left| \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \right| \leq \frac{2\pi M}{2n+1}$

3°) c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = 0$

4°) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

5°) a) Montrer, en le justifiant avec soin que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{t} dt$

5°) b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Intégrale de "Futuna" : correction

1°) $t \mapsto \frac{1}{ch^n(t)}$ est continue sur $[0; +\infty[$. L'existence de I_n ne pose problème qu'en $+\infty$

Au voisinage de $+\infty$: $ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{e^t}{2}(1 + e^{-2t}) \sim \frac{e^t}{2}$ car $1 + e^{-2t} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

Alors $\frac{1}{ch^n(t)} \sim \left(\frac{2}{e^t}\right)^n \sim 2^n e^{-nt} > 0$

Mais $\int_0^{+\infty} e^{-nt} dt$ est une intégrale de référence convergente puisque $n > 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Donc, par règle de l'équivalent : I_n est une intégrale convergente.

$$2^\circ) \text{ a) } I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch(t)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt$$

On effectue dans I_1 le changement de variable C^1 bijectif $u = e^t$ et, puisque $du = e^t dt = u dt$, on obtient :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int_1^{+\infty} \frac{2}{1+u^2} du \text{ qui est convergente par la question 1}^\circ).$$

$$\text{Alors } I_1 = 2 \left(\lim_{X \rightarrow +\infty} \arctan(X) - \arctan(1) \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{On a donc } \boxed{I_1 = \frac{\pi}{2}}$$

$$2^\circ) \text{ b) } th \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } th'(t) = \left(\frac{sh(t)}{ch(t)} \right)' = \frac{ch(t)ch'(t) - sh(t)sh'(t)}{ch^2(t)} = \frac{1}{ch^2(t)} \text{ car } ch^2(t) - sh^2(t) = 1$$

$$\text{On a donc } \forall t \in \mathbb{R} \text{ } th'(t) = \frac{1}{ch^2(t)} \text{ et on en déduit : } I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^2(t)} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} th(X) - th(0) = 1$$

$$\text{On a donc } \boxed{I_2 = 1}$$

$$3^\circ) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^* : I_{n+1} - I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^{n+1}(t)} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^n(t)} dt$$

$$\text{Par linéarité de l'intégrale : } I_{n+1} - I_n = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{ch^{n+1}(t)} dt - \frac{1}{ch^n(t)} \right] dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - ch(t)}{ch^{n+1}(t)} dt$$

Mais $\forall t \in \mathbb{R} \text{ } ch(t) \geq 1$ donc $\frac{1 - ch(t)}{ch^{n+1}(t)} \leq 0$ et par positivité de l'intégrale on a : $I_{n+1} - I_n \leq 0$

On a donc que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

$$4^\circ) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ } I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^n(t)} dt = \int_0^{+\infty} ch(t) \frac{1}{ch^{n+1}(t)} dt$$

On intègre par parties, avec des intégrales convergentes car la limite ci-dessous existe dans $\mathbb{R}$:

$$I_n = \left[\lim_{X \rightarrow +\infty} \left[sh(X) \frac{1}{ch^{n+1}(X)} \right] - 0 \right] - \int_0^{+\infty} sh(t) \frac{-(n+1)sh(t)}{ch^{n+2}(t)} dt$$

$$\Rightarrow I_n = [0 - 0] + (n+1) \int_0^{+\infty} \frac{ch^2(t) - 1}{ch^{n+2}(t)} dt \text{ car } sh^2(t) = ch^2(t) - 1$$

$$\Rightarrow I_n = (n+1) \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^n(t)} - \frac{1}{ch^{n+2}(t)} \right] dt$$

$$\Rightarrow I_n = (n+1) [I_n - I_{n+2}] \text{ par linéarité de l'intégrale}$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \frac{n}{n+1} I_n$$

$$\text{On a donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+2} = \frac{n}{n+1} I_n}$$

5°) $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ mais $I_n > 0$
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ on utilise le résultat du 4°)
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{n+1} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ en passant à la limite, par encadrements
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

On a donc bien : $\boxed{I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n}$

6°) Pour $n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} - u_n = (n+1)I_{n+1}I_{n+2} - nI_nI_{n+1}$ on utilise le 4°)
 $u_{n+1} - u_n = (n+1)I_{n+1}\frac{n}{n+1}I_n - nI_nI_{n+1} = I_{n+1}nI_n - nI_nI_{n+1} = 0$
et donc la suite $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.

7°) On a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ constante et $u_1 = I_1I_2 = \frac{\pi}{2}$ d'après le 2°).
Donc $u_n = \frac{\pi}{2} \Rightarrow nI_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ On utilise le 5°)
 $nI_n^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ mais $I_n > 0$ donc $\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$ et on en déduit $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$

Exercice d'algèbre linéaire : correction

• Soit $x \in E$. Alors :

$$x \in \ker(u) \Rightarrow u(x) = 0_E \Rightarrow u(u(x)) = u(0_E) \Rightarrow u^2(x) = 0_E \Rightarrow x \in \ker(u^2)$$

On a donc : $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et on en déduit : $\dim(\ker(u)) \leq \dim(\ker(u^2))$

• On pose : $v = u|_{\text{Im}(u)}$ qui est donc une application linéaire de $\text{Im}(u)$ dans E .

• Soit $z \in E$. Alors : $z \in \text{Im}(v)$

$$\Leftrightarrow \exists y \in \text{Im}(u), u(y) = z$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in E, \begin{cases} y = u(x) \\ u(y) = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in E, z = u^2(x) \text{ on remonte en posant } y = u(x)$$

$$\Leftrightarrow z \in \text{Im}(u^2)$$

On en déduit $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^2)$

• D'autre part : $z \in \ker(v) \Rightarrow v(z) = 0_E \Rightarrow u(z) = 0_E \Rightarrow z \in \ker(u)$

On a donc : $\ker(v) \subset \ker(u)$

• De la dernière inclusion on déduit : $\dim(\ker(v)) \leq \dim(\ker(u))$

Donc : $\dim(\ker(v)) + \dim(\text{Im}(v)) \leq \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(v))$

Pour le membre de gauche de l'inégalité, on utilise le théorème du rang qui donne, puisque l'ensemble de départ de v est $\text{Im}(u)$: $\dim(\ker(v)) + \dim(\text{Im}(v)) = \dim(\text{Im}(u))$

Pour le membre de droite on utilise : $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^2)$

On a donc : $\dim(\text{Im}(u)) \leq \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u^2))$

On utilise encore le théorème du rang pour u et u^2 et on a donc :

$$\dim(E) - \dim(\ker(u)) \leq \dim(\ker(u)) + \dim(E) - \dim(\ker(u^2)) \Rightarrow \dim(\ker(u^2)) \leq 2\dim(\ker(u))$$

• Bilan : On a démontré que : $\boxed{\dim(\ker(u)) \leq \dim(\ker(u^2)) \leq 2\dim(\ker(u))}$

Calcul de l'intégrale de Dirichlet : correction

1°) a) Comme $t \in]0; 2\pi[$ alors $e^{it} \neq 1$ et on peut utiliser la somme des termes d'une suite géométrique pour obtenir : $\sum_{k=1}^n e^{ikt} = \sum_{k=1}^n (e^{it})^k = \frac{e^{it}(1-(e^{it})^n)}{1-e^{it}}$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{ikt}\right) \\ \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}(1-(e^{it})^n)}{1-e^{it}}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{it} \frac{1-e^{nit}}{1-e^{it}}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{it} \frac{e^{nit/2}(e^{-nit/2}-e^{nit/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2}-e^{it/2})}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{it(1+n/2-1/2)} \frac{e^{-nit/2}-e^{nit/2}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{\frac{n+1}{2}it} \frac{-2i\sin(\frac{nt}{2})}{-2i\sin(\frac{t}{2})}\right) \\ &= \frac{\cos(\frac{n+1}{2}t)\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$

$$\text{Alors : } \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t) - \sin(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}$$

$$\text{On en déduit : } \boxed{S_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} \text{ pour } t \in]0, 2\pi[}$$

1°) b) L'intégrale A peut à priori poser problème en 0, mais la relation du a) permet de voir que : $A = \int_0^\pi S_n(t)dt$ qui est clairement une intégrale convergente puisque S_n est continue sur $[0; \pi]$ comme somme de fonctions continues.

On a alors : $A = \int_0^\pi [\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)]dt = [\frac{1}{2}t + \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k}]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$ puisque $\sin(kt) = \sin(0) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{A \text{ existe donc et vaut } A = \frac{\pi}{2}}$$

2°) a) $\sin(\frac{t}{2}) \neq 0$ sur $]0; \pi]$ et donc f est de classe C^0 sur $]0; \pi]$ comme quotient de fonctions C^0 (avec le dénominateur qui ne s'annule pas).

Pour $t \neq 0$ au voisinage de 0 :

$$f(t) = \frac{1}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{t} = \frac{t-2\sin(t/2)}{2\sin(t/2)t} = \frac{t-2(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48}+o(t^3))}{2t(\frac{t}{2}+o(t))} = \frac{\frac{t^3}{24}+o(t^3)}{t^2+o(t^2)} \sim \frac{\frac{t^3}{24}}{t^2} \sim \frac{t}{24} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = f(0)$$

donc f est continue en 0. Comme f est aussi continue sur $]0; \pi]$ alors $\boxed{f \text{ est de classe } C^0 \text{ sur } [0, \pi]}$

2°) b) $\sin(\frac{t}{2}) \neq 0$ sur $]0; \pi]$ et donc f est de classe C^1 sur $]0; \pi]$ comme quotient de fonctions C^1 (avec le dénominateur qui ne s'annule pas).

$$\text{On a alors } \forall t \in]0; \pi], f'(t) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} + \frac{1}{t^2} = \frac{4\sin^2(\frac{t}{2}) - t^2\cos(\frac{t}{2})}{4t^2\sin^2(\frac{t}{2})}$$

2°) c) Avec le a) il reste juste à voir que f est C^1 en 0.

Pour t au voisinage de 0, compte tenu de l'expression du a) :

$$f'(t) = \frac{4(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{8 \times 6}+o(t^3))^2 - t^2(1-\frac{1}{2^2 \times 2}t^2+o(t^2))}{4t^2(\frac{t}{2}+o(t))^2} = \frac{4(\frac{t^2}{4}-\frac{t^4}{48}+o(t^4))-t^2+\frac{1}{8}t^4+o(t^4)}{4t^2(\frac{t^2}{4}+o(t^2))} = \frac{t^2-\frac{t^4}{12}-t^2+\frac{1}{8}t^4+o(t^4)}{t^4+o(t^4)} = \frac{\frac{1}{24}t^4+o(t^4)}{t^4+o(t^4)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{24}$$

On a donc $\begin{cases} f \text{ continue sur } [0, \pi] \\ f \text{ dérivable sur }]0, \pi] \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = \frac{1}{24} \end{cases}$ donc, par le théorème de prolongement de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{24}$. On a aussi f' continue en 0, et on peut donc affirmer que $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, \pi]}$

2°) d) f' est continue sur l'intervalle fermé bornée $[0, \pi]$ donc par le théorème des bornes atteintes, f' est bornée sur $[0, \pi]$.

Donc $\boxed{\text{il existe un réel } M \text{ tel que : } \forall t \in [0; \pi] , |f'(t)| \leq M}$

3°) a) Comme f est C^1 on peut intégrer par partie avec

$$\begin{cases} u = f \\ v' = \sin((n + \frac{1}{2})t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u' = f' \\ v = \frac{-1}{n+\frac{1}{2}} \cos((n + \frac{1}{2})t) = \frac{-2}{2n+1} \cos((n + \frac{1}{2})t) \end{cases}$$

$$\text{Alors } \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt$$

$$= [f(t) \frac{-2}{2n+1} \cos((n + \frac{1}{2})t)]_0^\pi - \int_0^\pi f'(t) \frac{-2}{2n+1} \cos((n + \frac{1}{2})t) dt = 0 + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos((n + \frac{1}{2})t) dt$$

Le terme en crochet est nul puisque $f(0) = 0$ et $\cos((n + \frac{1}{2})\pi) = \cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$

$$\text{On a donc } \boxed{\int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi f'(t) \cos((n + \frac{1}{2})t) dt}$$

$$3^\circ) \text{ b) } |f'(t) \cos((n + \frac{1}{2})t)| \leq |f'(t)| \leq M \text{ avec le } 2^\circ) \text{ d).}$$

L'inégalité de la moyenne et l'égalité du 3°) a) donne directement : $\boxed{\left| \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \right| \leq \frac{2\pi M}{2n+1}}$

$$3^\circ) \text{ c) Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\pi M}{2n+1} = 0, \text{ par encadrement, avec le } 3^\circ) \text{ b) on obtient : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = 0}$$

4°) Voir cours

5°) a) On effectue le changement de variable $u = (n + \frac{1}{2})t$ (donc $dt = \frac{du}{n+\frac{1}{2}}$) et on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{t} dt = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{n+\frac{1}{2}}} \frac{du}{n+\frac{1}{2}} = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin(u)}{u} du$$

$$\text{Comme } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ est convergente et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \frac{1}{2})\pi = +\infty \text{ alors : } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{t} dt}$$

$$\begin{aligned} 5^\circ) \text{ b) } & \int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{t} dt \\ &= \int_0^\pi \sin((n + \frac{1}{2})t) \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} + \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} \right] dt \\ &= \underbrace{- \int_0^\pi \sin((n + \frac{1}{2})t) f(t) dt}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{0}} + \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} dt}_{A=\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

D'après 3°) c) et 1°) b)

$$\text{Avec le } 5^\circ) \text{ a) On en déduit que } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$