

Chapitre 5 : Calcul matriciel, algèbre linéaire et matrices

Remarque préliminaire : dans ce chapitre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Calcul matriciel

1.1 Rappels, notations

Définition. Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Alors on appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans K , toute famille d'éléments de K indexée par $\llbracket 1..n \rrbracket \times \llbracket 1..p \rrbracket$.

Remarques. On parle alors de matrice de taille (n, p) ou de taille $n \times p$.

On note $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1..n \rrbracket \times \llbracket 1..p \rrbracket}$ ou encore $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ou encore $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$

On dit que $a_{i,j}$ est le $(i, j)^{\text{ème}}$ terme de A .

Le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

Le vecteur ligne $(a_{i,1} \ \cdots \ a_{i,p})$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A .

Si $n = p$ on a une matrice carrée.

On note $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices n lignes, p colonnes.

Si $n = p$ on pose $M_n(K) = M_{n,p}(K)$.

1.2 Somme et multiplication par un scalaire

1.2.1 Somme

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(K)$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(K)$. Soit $\lambda \in K$. Alors on pose $C = A + \lambda B$ la matrice $C = (c_{i,j})$ de $M_{n,p}(K)$ définie par $\forall i \in \llbracket 1..n \rrbracket \ \forall j \in \llbracket 1..p \rrbracket$, $c_{i,j} = a_{i,j} + \lambda b_{i,j}$.

1.2.2 Structure vectorielle

Lemme. $(M_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un K espace vectoriel.

preuve : cf première année

1.3 Produit matriciel

1.3.1 Produit

Définition. Soit n, p, q trois entiers naturels non nul.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(K)$ Soit $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in M_{p,q}(K)$

Alors on définit le produit AB comme la matrice $C = (c_{i,j}) = AB \in M_{n,q}(K)$ ou

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \ \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \ c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarques. Attention à la compatibilité des formats.

Attention le produit n'est pas commutatif.

DESSIN :

1.3.2 Produit d'une matrice par un vecteur colonne ou un vecteur ligne

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exemple. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.4 Transposition

1.4.1 Définition, notation

Définition. Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $M_{n,p}(K)$ alors on appelle matrice transposée de A et on note A^T la matrice de $M_{p,n}(K)$ de (i,j) ^{ime} coefficient $a_{j,i}$.

Exemple. $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B^T =$

1.4.2 Matrices symétriques et antisymétriques

Définitions. Soit $A \in M_n(K)$.

Alors on dit que A est symétrique si et seulement si $A = A^T$.

Alors on dit que A est antisymétrique si et seulement si $A = -A^T$.

On note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(K)$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Remarque. Il faut, bien sûr, des matrices carrées.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ \pi & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ -2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique

1.4.3 Propriétés

Lemme. Soit $A \in M_{n,p}(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $\begin{cases} (A^T)^T = A \\ (AB)^T = B^T A^T \end{cases}$.

Soit $A, B \in M_{n,p}(K)$ alors : $(A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T$

preuve :

1.5 Rang d'une matrice

Définition. Soit $A \in M_{n,p}(K)$. Alors on définit le rang de A comme le rang de la famille des colonnes de A , dans $M_{n,1}(K)$.

Lemme. Soit A une matrice.

$rg(A) = rg(A^T)$ On peut ajouter à une ligne (ou une colonne) de A une combinaison linéaire des autres sans changer le rang de A .

On peut échanger deux lignes ou deux colonnes de A sans changer le rang de A .

On peut multiplier une ligne ou une colonne de A sans changer le rang de A .

1.6 Inverse d'une matrice

1.6.1 Définition

Soit $A \in M_n(K)$. Alors on dit que A est **inversible**

si et seulement si $\exists B \in M_n(K)$, $AB = BA = I_n$ avec $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarques. Si A est inversible on note A^{-1} l'inverse de A (B dans la définition ci-dessus).
On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$.
Cet ensemble est stable par inversion et produit (on dit que c'est un groupe dont I_n est l'élément neutre).
Rappel : $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$

1.6.2 Une méthode de calcul de l'inverse

On écrit le système $AX = Y$ avec X et Y deux vecteurs colonnes. On inverse le système et on en déduit A^{-1} .

Remarques. On peut aussi utiliser les opérations élémentaires. Passer par la comatrice est H.P.

1.6.3 Exemple

Calcul de l'inverse de $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2 Déterminant d'une matrice carrée

2.1 Définition

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ appelée **déterminant**, telle que :

1. le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes
2. l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1
3. le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1

2.2 Notations

Si $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ on note $\det(A)$ ou encore $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ le déterminant de A .

2.3 Cas particulier des dimensions 2 et 3

Théorème . $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - dbi - ahf.$$

Remarques. Règle de Sarrus, uniquement dimension 3.
En dimension n la formule comporte $n!$ termes (24 en dimension 4 !!).

2.4 Opérations élémentaires

Lemme. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in K$ alors :

1. $\det(A^T) = \det(A)$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
4. l'échange de deux colonnes (ou de deux lignes) de A change le signe du déterminant
5. on peut ajouter à une colonne (ou une ligne) de A une combinaison linéaire des autres colonnes, sans changer le déterminant de A .
6. si A admet deux colonnes (ou deux lignes) égales alors $\det(A) = 0$
7. le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne et par rapport à chaque ligne

2.5 Matrices triangulaires

Lemme. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.*

Remarques. *En appliquant le pivot de Gauss, on peut calculer le déterminant par opérations élémentaires (de manière algorithmique, donc informatique).*

En particulier le déterminant d'une matrice diagonale est égale au produit de ses termes diagonaux.

preuve :

2.6 Inverse

Théorème . *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :*

A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

De plus si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

preuve :

2.7 Déterminant par blocs

Théorème . *Soit $A \in M_p(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$, $C \in M_q(K)$ alors : $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{M_{q,p}(K)} & C \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(C)$*

2.8 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème . *Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket , \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} \\ \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket , \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} \end{cases}$$

ou $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant à A sa $i^{\text{ième}}$ ligne et sa $j^{\text{jème}}$ colonne. Dans la première formule on dit que l'on développe $\det(A)$ par rapport à sa $i^{\text{ième}}$ ligne, dans la deuxième formule on dit que l'on développe $\det(A)$ par rapport à sa $j^{\text{jème}}$ colonne.

Exemple.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2.9 Complément : Déterminant de Vandermonde

2.9.1 Définition

Soit $n \geq 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$. Alors on appelle déterminant de Vandermonde le déterminant (d'une matrice de

$M_n(\mathbb{K})$) suivant : $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

2.9.2 Théorème

Théorème : $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

2.9.3 Preuve

3 Interprétation vectorielle des matrices

3.1 Matrice d'un vecteur dans une base

Définition. Soit E un K espace vectoriel et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $x \in E$, alors on peut écrire $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Alors, $Mat_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est appelée matrice des coordonnées de x dans B .

Définition. Soit E un K espace vectoriel et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $S = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E .

Alors on appelle matrice de S dans B la matrice de $M_{p,n}(K)$ dont la j -ième colonne est $Mat_B(x_j)$.

Autrement dit : $Mat_B(S) = (x_{i,j})$ avec $x_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i$.

Exemple. Matrice de $(1 + X + X^2, 1 - X)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

3.2 Matrice d'une application linéaire

3.2.1 Cas général

Définition. Soit E un K espace vectoriel et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit F un K espace vectoriel et $B' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F .

Soit $\phi \in L(E, F)$.

Alors on appelle matrice $Mat_{B,B'}(\phi)$ de ϕ relativement à B et B' , la matrice de la famille $(\phi(e_j))_{1 \leq j \leq n}$ dans la base B' .

Remarques. On rappelle que ϕ est entièrement déterminé par l'image des vecteurs d'une base de E .

$$\begin{array}{ccc} L(E, F) & \longrightarrow & M_{p,n}(K) \\ \phi & \mapsto & Mat_{B,B'}(\phi) \end{array} \text{ est un isomorphisme d'espace vectoriel.}$$

On a donc $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket f(e_j) = \sum_{i=1}^p m_{i,j} f_i$ avec $Mat_{B,B'}(\phi) = (m_{i,j})$

Exemple. Matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de $\phi : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x - y - 2z)$

3.2.2 Cas particulier

Si $E = F$ et $B = B'$ alors ϕ est un endomorphisme et on note $Mat_{B,B'}(\phi) = Mat_B(\phi)$

Exemple. Matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de $\phi : P \mapsto Q$ avec $Q(X) = XP'(X + 1)$

3.3 Utilisation du produit matriciel

3.3.1 Premier théorème

Théorème . Soit E un K espace vectoriel et B une base de E .

Soit F un K espace vectoriel et B' une base de F .

Soit $\phi \in L(E, F)$.

Alors, pour tout $x \in E$ on a : $Mat_{B'}(\phi(x)) = Mat_{B,B'}(\phi) Mat_B(x)$

3.3.2 Deuxième théorème

Théorème . Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et B une base de E .

Soit F un K espace vectoriel de dimension finie et B' une base de F .

Soit G un K espace vectoriel de dimension finie et B'' une base de G .

Soit $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$.

Alors on a : $Mat_{B,B''}(g \circ f) = Mat_{B',B''}(g) Mat_{B,B'}(f)$

Remarque. Dans le cas particulier où $E = F = G$ et $B = B' = B''$ alors : $Mat_B(g \circ f) = Mat_B(g) Mat_B(f)$

3.4 Changement de bases

3.4.1 Matrices de passage

Définition. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie. Soit B et B' deux bases de E . Alors on appelle **matrice de passage de la base B à la base B' la matrice $Mat_B(B')$** . On note $P_B^{B'}$ cette matrice

Remarques. On a : $P_B^{B'} = Mat_B(B') = Mat_{B',B}(Id_E)$, $P_B^{B'}$ est inversible et $(P_B^{B'})^{-1} = P_{B'}^B$.
Si B , B' et B'' sont trois bases de E alors : $P_B^{B''} = P_B^{B'} P_{B'}^{B''}$

3.5 Formules de changements de bases

3.5.1 Formule de changement de base pour un vecteur

Lemme. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et soit B et B' deux bases de E .
Alors pour tout vecteur x de E : **$Mat_B(x) = P_B^{B'} Mat_{B'}(x)$**

3.5.2 Formule de changement de base pour une application linéaire

Lemme. Soit E et F deux K espace vectoriel de dimension finie, soit B et B' deux bases de E , soit C et C' deux bases de F . Soit $\phi \in L(E, F)$. Alors **$Mat_{B,C}(\phi) = P_C^{C'} Mat_{B',C'}(\phi) (P_B^{B'})^{-1}$**

3.5.3 Formule de changement de base pour un endomorphisme

Lemme. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, soit B et B' deux bases de E .
Soit $\phi \in L(E)$. Alors **$Mat_B(\phi) = P_B^{B'} Mat_{B'}(\phi) (P_B^{B'})^{-1}$**

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{3}, \frac{2x+2y}{3}\right)$
Matrices dans la base canonique et dans la base $((1, 1), (1, -1))$

4 Utilisation du déterminant

4.1 Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base

4.1.1 Définition

Définition. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et S une famille de $\dim(E)$ vecteurs de E .
Alors on appelle **déterminant de S relativement à B la valeur suivante : $det_B(S) = det(Mat_B(S))$**

4.1.2 Propriétés

Lemme. **S est une base $\Leftrightarrow det_B(S) \neq 0$**

4.2 Déterminant d'un endomorphisme

4.2.1 Définition

Définition. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $\phi \in L(E)$.
On appelle **déterminant de ϕ la valeur suivante $det(\phi) = det(Mat_B(\phi))$ avec B une base quelconque de E .**

Remarque. Bien sûr, la valeur de $det(\phi)$ est indépendante du choix de B et résulte de la formule de changement de bases pour un endomorphisme et du fait que 2 matrices semblables ont même déterminant.

4.2.2 Propriétés

Lemme. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in L(E)$ et $\lambda \in K$.

Alors : $\begin{cases} det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f \text{ est un automorphisme} \\ det(f \circ g) = det(f)det(g) \\ det(\lambda f) = \lambda^{\dim(E)} det(f) \end{cases}$

Remarques. Si f est bijective $det(f^{-1}) = det(f)^{-1}$
Si B est une base de E et S une famille de $\dim(E)$ vecteurs de E alors $det_B(f(S)) = det(f)det_B(S)$, $det(f)$ peut alors être vu comme un coefficient de dilatation.

Sommaire

1	Calcul matriciel	1
1.1	Rappels, notations	1
1.2	Somme et multiplication par un scalaire	1
1.2.1	Somme	1
1.2.2	Structure vectorielle	1
1.3	Produit matriciel	1
1.3.1	Produit	1
1.3.2	Produit d'une matrice par un vecteur colonne ou un vecteur ligne	2
1.4	Transposition	2
1.4.1	Définition, notation	2
1.4.2	Matrices symétriques et antisymétriques	2
1.4.3	Propriétés	2
1.5	Rang d'une matrice	2
1.6	Inverse d'une matrice	2
1.6.1	Définition	2
1.6.2	Une méthode de calcul de l'inverse	3
1.6.3	Exemple	3
2	Déterminant d'une matrice carrée	3
2.1	Définition	3
2.2	Notations	3
2.3	Cas particulier des dimensions 2 et 3	3
2.4	Opérations élémentaires	3
2.5	Matrices triangulaires	4
2.6	Inverse	4
2.7	Déterminant par blocs	4
2.8	Développement par rapport à une ligne ou une colonne	4
2.9	Complément : Déterminant de Vandermonde	4
2.9.1	Définition	4
2.9.2	Théorème	4
2.9.3	Preuve	4
3	Interprétation vectorielle des matrices	5
3.1	Matrice d'un vecteur dans une base	5
3.2	Matrice d'une application linéaire	5
3.2.1	Cas général	5
3.2.2	Cas particulier	5
3.3	Utilisation du produit matriciel	5
3.3.1	Premier théorème	5
3.3.2	Deuxième théorème	5
3.4	Changement de bases	6
3.4.1	Matrices de passage	6
3.5	Formules de changements de bases	6
3.5.1	Formule de changement de base pour un vecteur	6
3.5.2	Formule de changement de base pour une application linéaire	6
3.5.3	Formule de changement de base pour un endomorphisme	6
4	Utilisation du déterminant	6
4.1	Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base	6
4.1.1	Définition	6
4.1.2	Propriétés	6
4.2	Déterminant d'un endomorphisme	6
4.2.1	Définition	6
4.2.2	Propriétés	6