

Mathématiques : Correction du BONUS du devoir à la maison n°3

II)1)a) Pour qu'il n'y ait qu'une seule montée la seule solution est d'avoir $(1, 2, 3, \dots, n-1, n)$, en effet si la liste n'est pas strictement croissante alors il y a au moins deux montées. On a donc $E_n(1) = 1$
De même la seule liste n'ayant qu'une descente est par symétrie : $(n, n-1, \dots, 3, 2, 1)$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, E_n(1) = E_n(n) = 1}$

II)1)b) La liste $a = (k, k-1, k-2, \dots, 1, k+1, k+2, \dots, n-1, n)$ admet k montées qui sont $((k), (k-1), \dots, (2), (1, k+2, \dots, n))$.

On a donc une liste a pour laquelle $E_n(a) = k$

II)2) Si $a_{i+1} > a_i$ on complète la dernière montée et on rajoute une descente, si $a_{i+1} < a_i$ on complète la dernière descente et on rajoute une montée ; on a donc $s_{i+1} = s_i + 1$, on a une suite arithmétique de raison 1. Comme $s_1 = 2$ (une montée, une descente), alors : $s_i = 1 + i$

On a donc : $\boxed{\forall a \in S_n, M(a) + D(a) = n + 1}$

II)3)a) $n + 1 - a_i = n + 1 - a_j \Rightarrow a_i = a_j$ donc Ψ est bien à valeurs dans S_n .

Clairement Ψ est injective donc, comme S_n est fini, $\boxed{\Psi \text{ est une bijection de } S_n \text{ dans } S_n}$

II)3)b) L'application Ψ transforme les montées en descentes et les descentes en montées. (ce serait pratique en vélo !!!)

On a donc $\text{card}(\{a \in S_n, M(a) = k\}) = \text{card}(\{a \in S_n, D(\Psi(a)) = n + 1 - k\})$

Changement d'indexation dans le deuxième card : $b = \Psi(a)$, on a donc :

$\text{card}(\{a \in S_n, M(a) = k\}) = \text{card}(b \in S_n, D(b) = n + 1 - k)$

Au bilan on a donc : $\boxed{E_n(k) = E_n(n + 1 - k)}$

II)4)a) Si $A \cup B = \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $A \cap B = \emptyset$ alors $B = \overline{A}$ (le complémentaire de A dans $\llbracket 1; n \rrbracket$)

Comme on veut A et B non vide, alors il faut $A \neq \emptyset$ et $A \neq \llbracket 1; n \rrbracket$.

Il s'agit donc de compter le nombre de parties de $\llbracket 1; n \rrbracket$ différentes de $\emptyset$ et de $\llbracket 1; n \rrbracket$

Le nombre de décompositions cherchée est donc : $\boxed{2^n - 2}$

II)4)b) Si $a = (a_1, \dots, a_n)$ admet exactement deux montées alors :

$\exists k \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_1 < a_2 < \dots < a_k$ et $a_k > a_{k+1}$ et $a_{k+1} < a_{k+2} < \dots < a_n$

Pour construire une telle liste, il faut choisir deux parties A et B vérifiant la condition du a) avec en plus la condition $a_k > a_{k+1}$

Mais si $a_{k+1} > a_k$ on a alors $a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1} < a_{k+2} < \dots < a_n$ et donc $a = (1, 2, \dots, n)$, il faut donc éliminer les décompositions : $\llbracket 1; n \rrbracket = \llbracket 1; k \rrbracket \cup \llbracket k+1; n \rrbracket$ (il y en a $n-1$)

On a donc $E_n(2) = (2^n - 2) - (n - 1) = 2^n - (n + 1)$. Bilan : $\boxed{E_n(2) = 2^n - (n + 1)}$

II)5)a) Les éléments a de S_{n+1} tel que $\varphi_n(a) = b = (b_1, \dots, b_n)$ vérifient :
 $a \in \{(n+1, b_1, \dots, b_n), (b_1, n+1, b_2, \dots, b_n), \dots, (b_1, \dots, b_i, n+1, b_{i+1}, \dots, b_n), \dots, (b_1, \dots, b_n, n+1)\}$

II)5)b) a est de la forme trouvée au a).

Si $a = (n+1, b_1, \dots, b_n)$ on rajoute une seule montée au début. $M(a) = M(\varphi(a)) + 1$

Si $a = (b_1, \dots, b_n, n+1)$ $n+1$ vient se rajouter à la dernière montée au début. $M(a) = M(\varphi(a))$

Si $a = (b_1, \dots, b_i, n+1, b_{i+1}, \dots, b_n)$ et si $b_i < b_{i+1}$ alors le $n+1$ vient "casser" une montée, et il y en a donc une de plus donc $M(a) = M(\varphi(a)) + 1$

Si $a = (b_1, \dots, b_i, n+1, b_{i+1}, \dots, b_n)$ et si $b_i > b_{i+1}$ alors le $n+1$ vient "compléter" une montée, et il y en a donc le même nombre donc $M(a) = M(\varphi(a))$

Bilan : $\boxed{M(a) \in \{M(\varphi(a)); M(\varphi(a)) + 1\}}$

II)5)c) • Dans une liste $a \in S_{n+1}$, telle que $b = \varphi_n(a)$ admet $k+1$ montées, on peut placer l'élément $n+1$ en fin de chacune des montées de b et seulement là pour préserver le nombre de montées.

On a donc $k+1$ choix pour chacune de ces listes.

• Dans une liste $a \in S_{n+1}$, telle que $b = \varphi_n(a)$ admet k montées, pour augmenter de une montée, il faut placer $n+1$ hors des positions qui laissent invariants le nombre de montées.

Il y a k positions de montées à éviter d'où $n-k$ positions possibles.

Il faut aussi compter l'insertion de $n+1$ en première position ce qui fait donc $n-k+1$ choix possibles pour chacune de ces listes.

• Ainsi, passant au cardinal, on conclut : $\boxed{E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k)}$

On vérifie facilement que la formule est valide pour $k=0$ et $k>n$

II)5)d) On a, d'après c) (avec $k=2$ et $n=4$): $E_5(3) = 3E_4(3) + 3E_4(2)$

On connaît $E_4(2) = 2^4 - (4+1) = 16 - 5 = 11$ d'après 4)b), il reste à calculer $E_4(3)$

On a, d'après c) (avec $k=2$ et $n=3$): $E_4(3) = 3E_3(3) + 2E_3(2)$

On connaît $E_3(2) = 2^3 - (3+1) = 8 - 4 = 4$ d'après 4)b) et $E_3(3) = 1$ d'après 1)a)

Donc $E_4(3) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$

Donc $E_5(3) = 3 \cdot 11 + 3 \cdot 11 = 66$

On a donc le tableau :

$n \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	4	1	0	0
4	1	11	11	1	0
5	1	?	66	?	1

6) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété : $HR_n \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, E_n(k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n$

Initialisation : pour $n=1$

Alors forcément $k=1$

Alors $E_n(k) = E_n(1) = 1$ d'après 1)a) et $\sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n = \sum_{j=1}^1 (-1)^{1-j} \binom{1+1}{1-j} 1^n = (-1)^0 \binom{2}{0} 1 = 1$ et on a bien HR_0

Hérédité : On suppose HR_n vraie. Alors, avec 5)d) :

Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k) = (k+1)\left[\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{n+1}{k+1-j} j^n\right] + (n+1-k)\left[\sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n\right]$$

Dans la deuxième somme le terme est nul pour $j = k+1$ car par convention $\binom{n+1}{k-(k+1)} = 0$

On peut donc regrouper les sommes comme suit :

$$E_{n+1}(k+1) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} [(k+1)\binom{n+1}{k+1-j} - (n+1-k)\binom{n+1}{k-j}] j^n$$

On calcule le crochet :

$$\begin{aligned} & (k+1)\binom{n+1}{k+1-j} - (n+1-k)\binom{n+1}{k-j} \\ &= (k+1) \frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n-k+j)!} - (n+1-k) \frac{(n+1)!}{(k-j)!(n+1-k+j)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+1-k+j)!} [(k+1)(n+1-k+j) - (k+1-j)(n+1-k)] \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+1-k+j)!} [(k+1)(n+1) - k(k+1) + j(k+1) - (k+1)(n+1) + k(k+1) + j(n+1) - jk] \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+1-k+j)!} [j(n+2)] \\ &= j \frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+1-k+j)!} \\ &= j \frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+2-(k+1-j))!} \end{aligned}$$

On retourne dans la somme :

$$E_{n+1}(k+1) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \left[j \frac{(n+1)!}{(k+1-j)!(n+2-(k+1-j))!} \right] j^n = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{n+2}{k+1-j} j^{n+1}$$

Il nous manque la formule pour $k = 1$ mais c'est un cas simple.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, E_n(k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n$

7) On utilise le 6) pour obtenir : $E_{2n-1}(n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{2n}{n-j} j^{2n-1}$

Comme $(-1)^{n-j} = (-1)^{n+j}$ et $\binom{2n}{n-j} = \binom{2n}{2n-(n-j)} = \binom{2n}{n+j}$ alors : $E_{2n-1}(n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$

Avec le I)4)c) on obtient : $E_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi} (2n-1)! \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^{2n} dt$