

Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°3

Exercice 0

1) Au voisinage de $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(1+\sin(x))}{\cos(x)} = \frac{\ln\left(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = \frac{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)}$

2) Au voisinage de $+\infty$ pour x : $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} \ln(1+e^{-x})$

Comme $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ alors $\ln(1+e^{-x}) \sim e^{-x}$ puisque $\ln(1+u) \underset{u=0}{\sim} u$

$$\sqrt{1+x+x^2} = (x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})))^{\frac{1}{2}} = x(1 + o(1)) \sim x$$

On a donc : $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x e^{-x}}$

3) $|u_n| \sim \frac{1}{n^2} > 0$ et $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

Donc par règle de l'équivalent $\sum |u_n|$ est convergente et par absolue convergence $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente}}$

4) On a $|v_n| = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(|v_n|)$ décroissante puisque : $(n+1)^2 + 2(n+1) + 3 > n^2 + 2n + 3$.

Comme la série $\sum v_n$ est alternée on peut appliquer le théorème spécial et on en déduit que : $\sum v_n$ est convergente.

$|v_n| \sim \frac{1}{n} > 0$ et $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc par équivalent $\sum |v_n|$ est divergente.

Bilan : $\boxed{\sum v_n \text{ est convergente mais n'est pas absolument convergente.}}$

5) $w_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$ Posons : $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $b_n = w_n - a_n$

Alors, $\sum a_n$ est alternée et $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $(|a_n|)$ est décroissante de limite nulle.

Par le théorème spécial on a donc $\sum a_n$ convergente.

On a $b_n = -\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) \sim \frac{-1}{2n} < 0$ et $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente;

Donc, par règle de l'équivalent $\sum b_n$ est divergente.

On a alors : $\left\{ \begin{array}{l} w_n = a_n + b_n \\ \sum a_n \text{ est convergente} \\ \sum b_n \text{ est divergente} \end{array} \right.$ et on en déduit : $\boxed{\sum w_n \text{ est divergente.}}$

Exercice 1

1°) $\forall t > 0$, $e^{2t} > 1$ donc $t + e^{2t} - 1 > 0$ et donc φ est continue sur $]0, +\infty[$, en particulier φ est continue sur $]0, 1]$.

L'intégrabilité de φ sur $]0, 1[$ pose donc problème uniquement en 0.

Au voisinage de 0 : $\varphi(t) = \frac{e^t}{t+e^{2t}-1} = \frac{1+o(1)}{t+(1+2t+o(t))-1} = \frac{1+o(1)}{3t+o(t)} \sim \frac{1}{3t} > 0$

Or $t \mapsto \frac{1}{3t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ (par Riemann), donc par équivalent φ n'est pas intégrable en 0.

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ n'est pas intégrable sur }]0, 1[}$

2°) φ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrabilité de φ sur $[1, +\infty[$ pose problème uniquement en $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$: $\varphi(t) \sim \frac{e^t}{e^{2t}} \sim e^{-t} > 0$

Or $t \mapsto e^{-t}$ est une fonction de référence intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par équivalent φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[}$

3°) Compte tenu du 1°) : $\boxed{\varphi \text{ n'est pas intégrable sur }]0, +\infty[}$

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, posons :
$$\begin{array}{ccc} f & : & [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & & t \longmapsto \frac{1+t^\alpha}{t^2+t^\alpha} \end{array}$$

Comme f est continue sur $[1, +\infty[$, l'existence de I pose problème uniquement en $+\infty$.

De plus, comme f est positive, l'existence de I est équivalente à l'intégrabilité de f en $+\infty$.

On va distinguer plusieurs cas, utiliser $t^\alpha = \exp(\alpha \ln(t))$ et travailler au voisinage de $+\infty$

On utilise aussi que, au voisinage de $+\infty$: $a < b \Rightarrow t^a = o(t^b)$

En effet : $\frac{t^a}{t^b} = t^{a-b} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ si $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$

Tout les équivalents ci-dessous sont au voisinage de $+\infty$.

Cas 1 : $\alpha < 0$

Alors $t^\alpha \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc $1 + t^\alpha \sim 1$ et $t^2 + t^\alpha \sim t^2$.

On a donc $f(t) \sim \frac{1}{t^2} > 0$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, alors, par équivalent f est intégrable en $+\infty$.

Cas 2 : $\alpha = 0$

Alors $f(t) = \frac{2}{1+t^2} \sim \frac{2}{t^2} > 0$.

Comme au cas 1, f est intégrable en $+\infty$.

Cas 3 : $0 < \alpha < 2$

Alors $t^\alpha \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc $1 + t^\alpha \sim t^\alpha$.

De plus $\alpha < 2$ et donc $t^2 + t^\alpha \sim t^2$. On a alors : $f(t) \sim \frac{t^\alpha}{t^2} \sim \frac{1}{t^{2-\alpha}} > 0$

Alors par équivalent avec les intégrales de Riemann en $+\infty$

f est intégrable en $+\infty \Leftrightarrow 2 - \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$

Cas 4 : $\alpha = 2$

Alors $f(t) = \frac{1+t^2}{2t^2} \sim \frac{1}{2} > 0$ et donc f n'est pas intégrable en $+\infty$ car $\int_1^{+\infty} 2dt$ est divergente.

Cas 5 : $\alpha > 2$

Alors $t^\alpha \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc $1 + t^\alpha \sim t^\alpha$.

De plus $\alpha > 2$ et donc $t^2 + t^\alpha \sim t^\alpha$. On a alors : $f(t) \sim \frac{t^\alpha}{t^\alpha} \sim 1 > 0$ et donc, comme au cas 4, f n'est pas intégrable en $+\infty$

Bilan : f intégrable en $+\infty \Leftrightarrow \left[\alpha < 0 \text{ ou } \alpha = 0 \text{ ou } \begin{cases} 0 < \alpha < 2 \\ \alpha < 1 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \alpha < 1$

On a donc : $\boxed{I \text{ existe} \Leftrightarrow \alpha < 1}$

Exercice 3

1°) $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc G ne pose problème qu'en $+\infty$.

Or, par comparaison exp-puissance on a $e^{-t^2} = o(\frac{1}{t^6})$ au voisinage de $+\infty$.

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^6}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, alors par négligeabilité $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc sur $[0, +\infty[$ puisqu'il n'y a pas de problème sur $[0, 1]$

On a donc : $\boxed{G \text{ est convergente}}$

2°) a) Posons $\forall x \in]-1; +\infty[$, $a(x) = x - \ln(1+x)$,

alors a est C^∞ sur $] -1; +\infty[$ et $\forall x \in]-1; +\infty[$, $a'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

On a donc :

x	-1	0	$+\infty$
$a'(x)$	-	0	+
$a(x)$		$\searrow$	$\nearrow$
		0	

et on en déduit $\forall x \in]-1; +\infty[$, $a(x) \geq 0$

On a donc $\boxed{\forall x \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$ }

2°) b) • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, \sqrt{n}[$, $x = \frac{t^2}{n} \geq -1$ et on peut donc appliquer le 2°) a).

On obtient : $\ln(1 + \frac{t^2}{n}) \leq \frac{t^2}{n} \Rightarrow n \ln(1 + \frac{t^2}{n}) \leq t^2 \Rightarrow (1 + \frac{t^2}{n})^n \leq \exp(t^2)$ par croissance de $\exp$

• Si $t = \sqrt{n}$ l'inégalité voulue s'écrit : $0 \leq \exp(-t^2)$ et elle est donc vraie.

• On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $(1 + \frac{t^2}{n})^n \leq \exp(t^2)}$

2°) c) On applique encore le a) avec $x = \frac{t^2}{n} > -1$. On obtient :

$\ln(1 + \frac{t^2}{n}) \leq \frac{t^2}{n} \Rightarrow n \ln(1 + \frac{t^2}{n}) \leq t^2 \Rightarrow (1 + \frac{t^2}{n})^n \leq \exp(t^2) \Rightarrow \exp(-t^2) \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $\exp(-t^2) \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ }

3°) a) $t \mapsto (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc v_n pose problème en $+\infty$

Mais $(1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \sim (\frac{t^2}{n})^{-n} \sim \frac{n^n}{t^{2n}} > 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ est une intégrale de Riemann convergente puisque $2n > 1$

donc, par équivalent, $\boxed{v_n \text{ est bien convergente.}}$

3°) b) En intégrant entre 0 et $\sqrt{n}$ l'inégalité du 2°) b) on obtient directement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq I_n$ }

3°) c) On obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$ en intégrant entre 0 et $\sqrt{n}$ l'inégalité du 2°) c)

Comme $0 \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$ alors : $\int_0^{\sqrt{n}} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt \leq \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$ et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \leq v_n}$

4°) a) On effectue dans $u_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt$ le changement de variable C^1 bijectif :

$t = \sqrt{n} \sin(x) \Leftrightarrow x = \arcsin(\frac{t}{\sqrt{n}})$ (on a bien $\frac{t}{\sqrt{n}} \in [0; 1]$). On a : $dt = \sqrt{n} \cos(x) dx$.

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x))^n (\sqrt{n} \cos(x) dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x))^n (\sqrt{n} \cos(x) dx) = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x) dx = \sqrt{n} w_{2n+1}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n} w_{2n+1}}$

4°) b) On effectue dans $v_n = \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$ le changement de variable C^1 bijectif,

$t = \sqrt{n} \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan(\frac{t}{\sqrt{n}})$. On a : $dt = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2(x)} dx$.

$$v_n = \int_0^{+\infty} (1 + \tan^2(x))^{-n} (\frac{\sqrt{n}}{\cos^2(x)} dx) = \int_0^{+\infty} (\frac{1}{\cos^2(x)})^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2(x)} dx = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \cos^{2n-2} dx = \sqrt{n} w_{2n-2}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sqrt{n} w_{2n-2}}$

5°) On regroupe les résultats de 3°)c), 4°)a) et 4°)b) et on obtient : $\sqrt{n} w_{2n+1} \leq I_n \leq \sqrt{n} w_{2n-2}$
Mais $\sqrt{n} w_{2n+1} \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\sqrt{n} w_{2n-2} \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Par encadrement, on en déduit $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Or, comme G est convergente, on a $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G$

On en déduit donc : $\boxed{G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

6°) • Pour $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, il n'y a problème qu'en $+\infty$ pour H_n .
Mais, au voisinage de $+\infty$: $t^{2n} e^{-t^2} = o(\frac{1}{t^4})$, donc comme $t \mapsto \frac{1}{t^4}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ alors, par négligeabilité, $t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et finalement H_n est bien convergente.

• On effectue dans H_n une intégration par partie, licite car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} e^{-t^2} = 0$

$$\text{On a : } H_n = [\frac{t^{2n+1}}{2n+1} e^{-t^2}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} (-2te^{-t^2}) dt = \frac{2}{2n+1} \int_0^{+\infty} t^{2n+2} e^{-t^2} dt$$

$$\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = \frac{2n+1}{2} H_n$$

• Donc $H_n = \frac{2n-1}{2} H_{n-1} = \frac{2n-1}{2} \frac{2n-3}{2} H_{n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1}{2^n} H_0$

$$\text{Mais } H_0 = G = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ et } (2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1 = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\text{Donc } H_n = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2 \times 4^n n!}$$

Mais d'après le TD sur Wallis : $\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = w_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$

$$\text{donc } H_n = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2 \times 4^n n!} \sim \frac{n!}{2\sqrt{n}}$$

On a donc : $\boxed{H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{2\sqrt{n}}}$

Problème

1)a) $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est clairement C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Il faut étudier g en 0.

- Continuité

Au voisinage de $t = 0$: $g(t) = \frac{\sin(t)}{t} = \frac{t+o(t^2)}{t} = 1 + o(t)$

Donc $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 1 = g(0)$ et donc g est continue en 0.

- Dérivabilité

Au voisinage de $t = 0$: $\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \frac{1+o(t)-1}{t} = o(1) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$, donc g est dérivable en $t = 0$ et $g'(0) = 0$

- Caractère C^1

Pour $t \neq 0$ on a, comme g est dérivable : $g'(t) = \frac{\cos(t)t - \sin(t)}{t^2}$

Au voisinage de $t = 0$: $g'(t) = \frac{(1+o(t))t - (t+o(t^2))}{t^2} = \frac{o(t^2)}{t^2} = o(1) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 = g'(0)$

Donc g' est continue en $t = 0$

- Bilan : On a démontré que : g est C^1 sur $\mathbb{R}$

Remarque : pour les 5/2 (pour les 3/2 plus tard), on peut montrer que g est C^∞ assez facilement avec les séries entières.

1)b)i) voir cours ou exos corrigés

1)b)ii) On effectue dans $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$ le changement de variable C^1 bijectif (car $j \neq 0$) $u = jt$.

On obtient que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ qui est convergente.

Comme il y a convergence on a égalité et donc (en utilisant l'intégrale admise) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt \text{ convergente et } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

1)c) Au voisinage de $t = 0$:

$$\begin{aligned} & \ln(g(t)) \\ &= \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \\ &= \ln\left(\frac{t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^5)}{t}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + o(t^4)\right) \\ &= \ln\left(1 - \left(\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{120} + o(t^4)\right)\right) \\ &= -\left(\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{120}\right) - \frac{1}{2} \frac{t^4}{36} + o(t^4) \\ &= -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + o(t^4) \end{aligned}$$

On a donc, pour t au voisinage de 0 : $\ln(g(t)) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + o(t^4)$

1)d) $\frac{u^2}{2} = \frac{nt^2}{6} \Rightarrow 3u^2 = nt^2$ On effectue donc, le changement de variable $C^1 : u = \sqrt{\frac{n}{3}}t$

$$\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \exp(-\frac{nt^2}{6}) dt = \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{3}}} \exp(-u^2) \sqrt{\frac{3}{n}} du = \underbrace{\sqrt{\frac{3}{n}} \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{3}}} \exp(-u^2) du}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

On a donc : $\boxed{\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \exp(-\frac{nt^2}{6}) dt \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}}$

2)a) Soit $n \geq 2$. Alors $t \mapsto \frac{\sin^n(t)}{t^n}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt$ pose problème en 0 et $+\infty$.

Au voisinage de 0 : $\frac{\sin^n(t)}{t^n} \sim \frac{t^n}{t^n} 1$ donc $t \mapsto \frac{\sin^n(t)}{t^n}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\int_0^1 \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt$ est convergente.

Pour $t \geq 1$ alors $0 \leq \left| \frac{\sin^n(t)}{t^n} \right| \leq \frac{1}{t^n}$

Comme $n \geq 2$ alors $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par Riemann, et donc, par comparaison $t \mapsto \frac{\sin^n(t)}{t^n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt$ est convergente.

$\int_0^1 \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt$ sont convergentes donc $\boxed{\text{pour } n \geq 2, \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt \text{ est convergente.}}$

2)b) Soit $a > 0$ et $A > 0$ alors :

On fait une intégration par parties avec $\begin{cases} u = \sin^2(t) \\ v' = \frac{1}{t^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} u' = 2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t) \\ v = \frac{-1}{t} \end{cases}$. Alors :

$$\int_a^A \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \left[\frac{-\sin^2(t)}{t} \right]_a^A + \int_a^A \frac{\sin(2t)}{t} dt$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-\sin^2(A)}{A} = 0$ et $\frac{-\sin^2(a)}{a} \sim \frac{-a^2}{a} = -a \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$, alors on a, comme les intégrales sont convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt$$

On utilise alors, la question 1)b)ii) et on a : $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}}$

3)a) A k fixé, h_n est C^∞ sur $[0, 2\pi]$, donc $h_n^{(k)}$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc $h_n^{(k)}$ est bornée sur $[0, 2\pi]$ par le théorème des bornes atteintes, et donc sur $\mathbb{R}$ par 2π périodicité.

Donc : $\boxed{\exists K > 0, \forall t \in \mathbb{R}, |h_n^{(k)}(t)| \leq K}$

3)b)i) Au voisinage de $t = 0$: $\sin^n(t) \sim t^n$ donc : $\boxed{h_n(t) = \sin^n(t) = t^n + o(t^n)}$

3)b)ii) Comme h^n est C^∞ , $h^{(k)}$ est C^∞ et admet un DL en 0 à tout ordre. De plus on peut obtenir le DL de $h_n^{(k)}$ en dérivant k fois celui de h_n .

Remarque : on ne peut pas en général dériver un DL, on a utilisé ici que h_n est C^∞

$$\text{On a donc } h_n^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}(t^n + o(t^n)) = \frac{n!}{(n-k)!}t^{n-k} + o(t^{n-k})$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3)c) • $t \mapsto \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 avec le 3)b)ii).

Donc $t \mapsto \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est intégrable sur $]0, 1]$

$$\bullet \text{ On a pour } t > 0 : \left| \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \right| \leq \frac{K}{t^{n-k}}$$

Mais pour $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ on a : $n-k \geq 2$ donc $t \mapsto \frac{1}{t^{n-k}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

et donc, par comparaison : $t \mapsto \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

$$\bullet \text{ En regroupant les deux derniers résultats on a : } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt \text{ est absolument convergente.}}$$

3)d) Soit $a > 0$ et $A > 0$. Par intégration par partie avec $\begin{cases} u' = h_n^{(n-1)} \\ v = \frac{1}{t} \end{cases}$ et $\begin{cases} u = h_n^{(n-2)} \\ v' = \frac{-1}{t^2} \end{cases}$:

$$\int_a^A \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt = \left[\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} \right]_a^A + \int_a^A \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt$$

Comme $h_n^{(n-2)}$ est bornée (3)a)) alors : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(A)}{A} = 0$

$$\text{Avec 3)b)ii) : } \frac{h_n^{(n-2)}(a)}{a} = a \times \underbrace{\frac{h_n^{(n-2)}(a)}{a^2}}_{\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{n!}{2}} \text{ donc } \lim_{a \rightarrow 0} \frac{h_n^{(n-2)}(a)}{a} = 0$$

Finalement $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt$ sont de même nature, et comme $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt$ est convergente

(par 3)c)) alors : $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt \text{ est convergente}}$

Remarque : on a démontré de plus que : $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt$

• Si on effectue encore une intégration par partie on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt = \left[\frac{h_n^{(n-3)}(t)}{t^2} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-3)}(t)}{t^3} dt$$

On démontre que le crochet est nul comme ci-dessus et par convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-3)}(t)}{t^3} dt$$

Une nouvelle intégration par partie donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-3)}(t)}{t^3} dt = 3 \times 2 \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-4)}(t)}{t^4} dt$$

On a finalement, par itération : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt = (k-1)! \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-k)}(t)}{t^k} dt$

En particulier, pour $k = n$: $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt = (n-1)! \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(0)}(t)}{t^n} dt$

On en déduit : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$

$$\begin{aligned}
4)a) \quad & h_{2n}(t) \\
&= \sin^{2n}(t) \text{ formule D'Euler} \\
&= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^{2n} \text{ formule du binôme} \\
&= \frac{1}{(2i)^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (e^{it})^{2n-k} (-e^{-it})^k \\
&= \frac{1}{4^n (i^2)^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k (e^{it})^{2n-2k} \\
&= \frac{1}{4^n (-1)^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k e^{i(2n-2k)t}
\end{aligned}$$

On a bien : $h_{2n}(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}$

4)b) On a que : $\frac{d}{dt}(e^{i(2n-2k)t}) = i(2n-2k)e^{i(2n-2k)t}$, et donc $\frac{d^{2n-1}}{dt^{2n-1}}(e^{i(2n-2k)t}) = (i(2n-2k))^{2n-1} e^{i(2n-2k)t}$

Avec l'expression de 4)a) et la linéarité de l'intégrale :

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} (i(2n-2k))^{2n-1} e^{i(2n-2k)t}$$

Comme $i^{2n-1} = (i^2)^n \frac{1}{i} = \frac{1}{i} (-1)^n$ et $(2n-2k)^{2n-1} = 2^{2n-1} (n-k)^{2n-1} = \frac{4^n}{2} (n-k)^{2n-1}$ alors :

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} (n-k)^{2n-1} e^{i(2n-2k)t}$$

Le terme pour $k = n$ étant nul on a :

$$\begin{aligned}
& h_{2n}^{(2n-1)}(t) \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} (n-k)^{2n-1} e^{i(2n-2k)t} + \frac{1}{2i} \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} (n-k)^{2n-1} e^{i(2n-2k)t}
\end{aligned}$$

Changement d'indice $j = n - k$ dans la première somme et $j = k - n$ dans la deuxième :

$$\begin{aligned}
& h_{2n}^{(2n-1)}(t) \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+n+j} \binom{2n}{n-j} j^{2n-1} e^{2ij t} + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j+n} \binom{2n}{j+n} (n - (j+n))^{2n-1} e^{i(2n-2(j+n))t} \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{2n}{2n-(n-j)} j^{2n-1} e^{2ij t} + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{2n}{j+n} (-j)^{2n-1} e^{-2ij t} \\
&= \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1} e^{2ij t} - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1} e^{-2ij t} \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1} \frac{e^{2ij t} - e^{-2ij t}}{2i} \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1} \sin(2jt)
\end{aligned}$$

On a bien : $h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1} \sin(2jt)$

4)c) Avec 3)d) :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2n} dt = \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_{2n}^{(2n-1)}(t)}{t} dt$$

En utilisant l'expression de 4)b) :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2n} dt = \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1} \frac{\sin(2jt)}{t} dt$$

Par linéarité de l'intégrale, comme les intégrales sont convergente :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2n} dt = \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2jt)}{t} dt$$

En utilisant la question 1)b)ii) :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2n} dt = \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1} \frac{\pi}{2}$$

On a donc : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{2n}{j+n} j^{2n-1}$

5)a) $\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt = \frac{1}{n-1}$

Donc $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et comme $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

5)b)i) Sur $]0, \frac{\pi}{2}]$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \frac{t \cos(t) - \sin(t)}{t^2}$

On pose : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $a(t) = t \cos(t) - \sin(t)$

a est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $a'(t) = \cos(t) - t \sin(t) - \cos(t) = -t \sin(t) \leq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Comme $a(0) = 0$ et que a est décroissante alors $a(t) \leq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Donc $\frac{d}{dt} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \leq 0$ et $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

5)b)ii) On a : $\epsilon_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par comparaison $\ln$ puissance.

Donc, à partir d'un certain rang, $\epsilon_n \leq \frac{\pi}{2}$ et par la question 5)b)i) :

$$\int_{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt = \int_{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} (g(t))^n dt \leq \int_{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} (g(\epsilon_n))^n dt = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right) (g(\epsilon_n))^n$$

$$\ln((g(\epsilon_n))^n) = n \ln(g(\epsilon_n))$$

Avec le 1)c) : $\ln((g(\epsilon_n))^n) = n \left(-\frac{\epsilon_n^2}{6} - \frac{\epsilon_n^4}{180} + o(\epsilon_n^4)\right) = n \left(-\frac{\epsilon_n^2}{6} + o(\epsilon_n^2)\right) = \frac{-(\ln(n))^2}{6} + o((\ln(n))^2)$

Alors : $\int_{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right) \exp\left(\frac{-(\ln(n))^2}{6} + o((\ln(n))^2)\right)$

Mais $\sqrt{n} = \exp(\frac{1}{2} \ln(n))$ donc : $\sqrt{n} \int_{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt = \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)}_{O(1)} \underbrace{\exp\left(\frac{\frac{\ln(n)}{2} - (\ln(n))^2}{6} + o((\ln(n))^2)\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty}$

Donc $\sqrt{n} \int_{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\int_{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

5)c)i) Pour $u \geq 0$, $|e^{-u} - 1| = 1 - e^{-u}$

Donc, pour u au voisinage de 0^+ :

$$|e^{-u} - 1| - 2u = 1 - e^{-u} - 2u = 1 - (1 - u + o(u)) - 2u = -u + o(u) \sim -u \leq 0$$

Donc au il existe un voisinage de 0 sur lequel $|e^{-u} - 1| - 2u < 0$, donc $\exists a > 0$ tel que :

$$\forall u \in [0, a], |e^{-u} - 1| - 2u < 0 \text{ et donc } \boxed{\exists a > 0 \text{ tel que : } \forall u \in [0, a], |e^{-u} - 1| \leq 2u}$$

5)c)ii) On pose :
$$\begin{array}{ccc} a & : &]0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \end{array}$$

Avec la question 1)c) on a, pour t au voisinage de 0 : $a(t) = \frac{-t^4}{180} + o(t^4) \sim \frac{-t^4}{180} < 0$

Donc $a(t) < 0$ au voisinage de 0

De même $a(t) + t^3 = t^3 - \frac{t^4}{180} + o(t^4) = t^3 + o(t^3) \sim t^3 > 0$ donc $a(t) + t^3 > 0$ au voisinage de 0

Donc au voisinage de 0 : $-t^3 \leq a(t) \leq 0$

Donc $\boxed{\text{il existe } b > 0 \text{ tel que, pour tout } t \in]0, b], -t^3 \leq \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leq 0}$

5)c)iii) $\bullet \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, pour n assez grand $0 < \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} < b$ et on a donc pour $t \in]0, \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}[$:

$$-t^3 \leq \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leq 0$$

$$\Rightarrow -t^3 - \frac{t^2}{6} \leq \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \leq -\frac{t^2}{6}$$

$$\Rightarrow -nt^3 - n\frac{t^2}{6} \leq n\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \leq -n\frac{t^2}{6}$$

Par croissance de $\exp$:

$$\exp(-nt^3 - n\frac{t^2}{6}) \leq \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \leq \exp(-n\frac{t^2}{6})$$

$$\Rightarrow \exp(-nt^3)\exp(-n\frac{t^2}{6}) - \exp(-n\frac{t^2}{6}) \leq \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n - \exp(-n\frac{t^2}{6}) \leq 0$$

$$\Rightarrow (\exp(-nt^3) - 1)\exp(-n\frac{t^2}{6}) \leq \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n - \exp(-n\frac{t^2}{6}) \leq 0$$

$$\Rightarrow \left| \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n - \exp(-n\frac{t^2}{6}) \right| \leq (1 - \exp(-nt^3)) \underbrace{\exp(-n\frac{t^2}{6})}_{\leq 1}$$

$$\Rightarrow \left| \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n - \exp(-n\frac{t^2}{6}) \right| \leq (1 - \exp(-nt^3))$$

$$\bullet \left| \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right|$$

$$= \left| \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \left[\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt - e^{-\frac{nt^2}{6}} \right] dt \right|$$

$$\leq \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \left| \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt - e^{-\frac{nt^2}{6}} \right| dt \text{ on utilise le point précédent (pour } n \text{ assez grand)}$$

$$\leq \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} (1 - \exp(-nt^3)) dt$$

On a donc : $\boxed{\text{pour } n \text{ assez grand : } \left| \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) dt}$

$$\bullet t \in]0, \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}[\Rightarrow 0 < t \leq \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0 < t^3 \leq \frac{\ln^3(n)}{n\sqrt{n}} \Rightarrow 0 < nt^3 \leq \frac{\ln^3(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc pour n assez grand : $]0, \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}[\subset]0, a[$ et donc avec c)i)

$$\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) dt \leq \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} 2nt^3 dt = \left[\frac{nt^4}{2} \right]_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} = n \frac{(\ln(n))^4}{2n^2} = \frac{(\ln(n))^4}{2n}$$

Enfinement : pour n assez grand :

$$\left| \int_0^{\frac{\ln(n)}{n}} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln(n)}{n}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \frac{(\ln(n))^4}{2n}$$

Remarque : mieux que l'énoncé ou erreur de calcul ?

$$5)c)iv) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt = \int_0^{\frac{\ln(n)}{n}} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt + \int_{\frac{\ln(n)}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt$$

On utilise 5)a) et 5b)ii) et on a : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt = \int_0^{\frac{\ln(n)}{n}} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Comme $\frac{(\ln(n))^4}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{(\ln(n))^4}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $\frac{(\ln(n))^4}{2n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et donc la question c)iii) donne :

$$\int_0^{\frac{\ln(n)}{n}} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt = \int_0^{\frac{\ln(n)}{n}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On se souvient alors de 1)d) : $\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \exp\left(-\frac{nt^2}{6}\right) dt \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$ qui donne $\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \exp\left(-\frac{nt^2}{6}\right) dt = \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

On obtient finalement : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt = \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

et donc $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$