

Devoir surveillé de Mathématiques n°2 : TYPE 2

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Respecter impérativement l'ordre des questions.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
- Dessiner une maison en dessous du mot **FIN**.
- Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.
- Utiliser uniquement des feuilles doubles et les numérotées en bas à droite de la manière suivante : (feuille n°X)/(nombre totale de feuilles)
- Mettre son nom et son prénom en haut à gauche de chaque feuille double

Problème 1 : Développement asymptotique de la série harmonique

A) une expression de γ sous forme de somme

On pose pour tout entier naturel n non nul : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et pour $n \geq 2$:
$$\begin{cases} u_n = S_n - \ln(n) \\ v_n = S_{n-1} - \ln(n) \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, x + \ln(1-x) \leq 0$

1) b) Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, x - \ln(1+x) \geq 0$

2) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes.

On note γ la limite commune de ces deux suites.

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose : $x_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

3) a) Faire un développement limité de x_n , en $\frac{1}{n}$, à l'ordre 2.

3) b) Quelle est la nature de la série $\sum x_n$?

3) c) Montrer que : $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$

B) une expression intégrale de γ

On pose, pour tout $x > 0$: $g(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x - 1 + e^{-x}$

4) a) Donner un équivalent simple de $f(x)$ en $x = 0$

4) b) Montrer que l'on peut prolonger g en une fonction continue en 0 (on notera encore g cette fonction)

4) c) Montrer que g est bornée sur $[0, +\infty[$. On note K un réel tel que : $\forall x \geq 0$, $|g(x)| \leq K$

On pose $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) dx$

5) Montrer que I est convergente.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $X > 0$: $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$ et $I_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$

6) a) Montrer que I_n est convergente.

On remarque que l'on a donc : $I_n = \lim_{X \rightarrow +\infty} I_n(X)$

On note, pour $X > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $J(X) = \int_1^X \frac{e^{-x}}{x} dx$ et $K_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-nx}}{x} dx$

6) b) i) Montrer que $J(X)$ et $K_n(X)$ ont des limites lorsque X tend vers $+\infty$

6) b) ii) Montrer que : $K_n(X) = \int_n^{nX} \frac{e^{-x}}{x} dx$

6) b) iii) Montrer que : $I_n = \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx$

6) c) Montrer que : $I_n = \ln(n) - \int_1^n \frac{1-e^{-x}}{x} dx$

On pose $F(t) = \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx$

On pose pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$: $\varphi_t(x) = \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}$

7) a) Montrer que φ_t peut être prolongée par continuité en 0

7) b) Montrer que la fonction F peut-être définie sur $\mathbb{R}$

7) c) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ tel que :

$$\forall h \in [-1, 1], \forall x \in [0, 1], |e^{-hx} - 1 + hx| \leq Mh^2x^2$$

7) d) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1, 0[\cup]0, 1]$. Montrer que : $\left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_0^1 e^{-xt} dx \right| \leq M|h| \int_0^1 e^{-xt} dx$

7) e) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $F'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

7) f) Calculer $F(1)$

7) g) Montrer que : $F(t) = \int_1^t \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$

8) a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$ est convergente.

8) b) Montrer que : $I_n = \ln(n) - \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$

8) c) En déduire que : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \ln(n)$

Pour tout $n \geq 2$ on pose : $L_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx})g(x)dx$

9) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $|L_n - I| \leq \frac{K}{n}$

9) b) Montrer que la suite $(L_n)_{n \geq 2}$ converge et déterminer sa limite.

9) c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $L_n = v_n$

9) d) En déduire que : $\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x}g(x)dx$

Problème 2 : Comportement asymptotique des restes d'une série numérique convergente

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ on notera $(\sum_{n \geq 0} u_n)$ la série de terme général u_n et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série lorsqu'elle est convergente.

A) Quelques exemples de calculs explicite du reste

1) Soit $(\sum_{n \geq 0} u_n)$ une série numérique réelle convergente.

a) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

b) Démontrer que la suite de terme général $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ est convergente et déterminer sa limite.

2) Dans cette question 2), on considère $r \in \mathbb{R}$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n$

a) Donner, sans démonstration, une condition nécessaire et suffisante sur r pour que $\sum u_n$ soit convergente.

b) On suppose que la condition du a) est vérifiée.

Simplifier alors l'expression $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$

3) Dans cette question 3), on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \arctan\left(\frac{2n}{n^4 + n^2 + 2}\right)$

a) Démontrer que la série de terme général u_n est convergente.

b) Trouver un couple de polynôme (P, Q) de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :
$$\begin{cases} P(X) - Q(X) = 2X \\ P(X)Q(X) = X^4 + X^2 + 1 \end{cases}$$

c) Montrer que : $\forall x > 0, \forall y > 0, \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan(x) - \arctan(y)$

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 - n + 1)$

e) La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \right)$ est-elle convergente ?

B) Exemple d'évaluation asymptotique du reste

Dans cette partie on considère un nombre réel x vérifiant $x > 1$

4) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^x}$ est convergente.

On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^x}$

5) a) Pour tout réel a strictement positif, justifier l'égalité : $\int_a^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt = \frac{a^{1-x} (1+(x-1)\ln(a))}{(x-1)^2}$

b) Etablir, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, la double inégalité : $\int_n^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt \leq r_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt$

c) En déduire que r_n est équivalent à $\frac{\ln(n)}{(x-1)n^{x-1}}$ lorsque n tend vers $+\infty$

C) Un cas plus général

Dans cette partie on considère $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs et on suppose que : $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$

On suppose de plus que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente.

6) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} b_n$ est convergente.

Remarque : il s'agit de refaire la démonstration du cours.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{n=k}^{+\infty} a_k$ et $B_n = \sum_{n=k}^{+\infty} b_k$

L'objectif de la question 7) est de montrer que : $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n$

7) Soit $\varepsilon > 0$

a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow (1 - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon)b_n$

b) Démontrer le résultat attendu.

8) Application

a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

b) Donner un équivalent, quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

D) Reste de séries alternées

Dans cette partie, f désigne une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$, décroissante et convexe, à valeurs strictement positives et de limite nulle en $+\infty$

9) Etablir, pour tout réel $t \geq 0$, la double inégalité : $0 \leq \frac{f(t)-f(t+1)}{f(t)} \leq \frac{-f'(t)}{f(t)}$

10) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = (-1)^n f(n)$

a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\begin{cases} i) & |r_n| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(n+p) \\ ii) & 0 \leq |r_n| - |r_{n+1}| \leq f(n) - f(n+1) \end{cases}$$

c) Montrer que la série : $\sum_{n \geq 0} r_n$ est convergente.

d) Démontrer que si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} = 0$ alors : $r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$

11) a) Pour quelle valeur du réel x , la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$ est-elle convergente ?

11) b) En supposant la condition du a) vérifiée, donner un équivalent, quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x}$

12) a) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente.

12) b) La série de terme général $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ est-elle convergente ?

***** FIN DU SUJET *****