

Devoir surveillé de Mathématiques n°2 : TYPE 1

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Respecter impérativement l'ordre des questions.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
- Dessiner un bonhomme en dessous du mot **FIN**.
- Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.
- Utiliser uniquement des feuilles doubles et les numérotées en bas à droite de la manière suivante : (feuille n°X)/(nombre totale de feuilles)
- Mettre son nom et son prénom en haut à gauche de chaque feuille double

EXERCICE 1

Effectuer le développement limité à l'ordre 3 en $x = 0$ de : $f(x) = \frac{\ln(1+\sin(x))}{\cos(x)}$

EXERCICE 2

On pose $\forall t \in]0, +\infty[$, $\varphi(t) = \frac{e^t}{t+e^{2t}-1}$ et $\forall t \in [0, +\infty[$, $\alpha(t) = t + e^{2t} - 1$

1°) Etudier la fonction α sur $[0, +\infty[$ et en déduire que φ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2°) Soit I est un intervalle non vide de $]0, +\infty[$

Que signifie : " φ est intégrable sur I " ?

3°) Etudier l'intégrabilité sur $]0, 1[$ de la fonction φ .

4°) Etudier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de la fonction φ .

EXERCICE 3

Déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^n \arctan(\frac{1}{1+n^2})}{n^3}$

EXERCICE 4

Déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{\ln(1+t) - \sin(t)}{t^2 \sqrt{\sin(t)}} dt$

EXERCICE 5

1°) Énoncer le théorème de comparaison série-intégrale.

2°) Déterminer une primitive sur $[2; +\infty[$ de $t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^2}$

3°) Déterminer la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt$

4°) Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$

EXERCICE 6

On considère E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $I =]-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $G = (g_1, \dots, g_n) \in E^n$.

Donner la définition de G est libre et de G est génératrice de E .

On pose : $f_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \ln(1+x)$, $f_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \operatorname{ch}(x)$ et $f_3 : I \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$

On remarque que $F = (f_1, f_2, f_3)$ est une famille de E .

2°) a) Donner les développements limités à tout ordre, au voisinage de 0, des fonctions de F .

2°) b) Montrer que F est libre.

Problème : Développement asymptotique de la série harmonique

A) une expression de γ sous forme de somme

On pose pour tout entier naturel n non nul : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et pour $n \geq 2$:
$$\begin{cases} u_n = S_n - \ln(n) \\ v_n = S_{n-1} - \ln(n) \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, x + \ln(1-x) \leq 0$

1) b) Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, x - \ln(1+x) \geq 0$

2) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes.

On note γ la limite commune de ces deux suites.

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose : $x_n = \frac{1}{n} + \ln(\frac{n}{n+1})$

3) a) Faire un développement limité de x_n , en $\frac{1}{n}$, à l'ordre 2.

3) b) Quelle est la nature de la série $\sum x_n$?

3) c) Montrer que : $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$

B) une expression intégrale de γ

On pose, pour tout $x > 0$: $g(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x - 1 + e^{-x}$

4) a) Donner un équivalent simple de $f(x)$ en $x = 0$

4) b) Montrer que l'on peut prolonger g en une fonction continue en 0 (on notera encore g cette fonction)

4) c) Montrer que g est bornée sur $[0, +\infty[$. On note K un réel tel que : $\forall x \geq 0 , |g(x)| \leq K$

On pose $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) dx$

5) Montrer que I est convergente.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $X > 0$: $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$ et $I_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$

6) a) Montrer que I_n est convergente.

On remarque que l'on a donc : $I_n = \lim_{X \rightarrow +\infty} I_n(X)$

On note, pour $X > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $J(X) = \int_1^X \frac{e^{-x}}{x} dx$ et $K_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-nx}}{x} dx$

6) b) i) Montrer que $J(X)$ et $K_n(X)$ ont des limites lorsque X tend vers $+\infty$

6) b) ii) Montrer que : $K_n(X) = \int_n^{nX} \frac{e^{-x}}{x} dx$

6) b) iii) Montrer que : $I_n = \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx$

6) c) Montrer que : $I_n = \ln(n) - \int_1^n \frac{1-e^{-x}}{x} dx$

On pose $F(t) = \int_0^1 \frac{e^{-x}-e^{-xt}}{x} dx$

On pose pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$: $\varphi_t(x) = \frac{e^{-x}-e^{-xt}}{x}$

7) a) Montrer que φ_t peut être prolongée par continuité en 0

7) b) Montrer que la fonction F peut-être définie sur $\mathbb{R}$

7) c) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ tel que :

$$\forall h \in [-1, 1], \forall x \in [0, 1], |e^{-hx} - 1 + hx| \leq Mh^2x^2$$

7) d) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1, 0[\cup]0, 1]$. Montrer que : $\left| \frac{F(t+h)-F(t)}{h} - \int_0^1 e^{-xt} dx \right| \leq M|h| \int_0^1 e^{-xt} dx$

7) e) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $F'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

7) f) Calculer $F(1)$

7) g) Montrer que : $F(t) = \int_1^t \frac{1-e^{-x}}{x} dx$

8) a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} dx$ est convergente.

8) b) Montrer que : $I_n = \ln(n) - \int_0^1 \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} dx$

8) c) En déduire que : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} dx = \ln(n)$

Pour tout $n \geq 2$ on pose : $L_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx})g(x)dx$

9) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $|L_n - I| \leq \frac{K}{n}$

9) b) Montrer que la suite $(L_n)_{n \geq 2}$ converge et déterminer sa limite.

9) c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $L_n = v_n$

9) d) En déduire que : $\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x}g(x)dx$