

EXERCICE n°1 (type 1)

Au voisinage de $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(1+\sin(x))}{\cos(x)} = \frac{\ln(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = \frac{(x-\frac{x^3}{6})-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} \\ &= (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)) \\ &= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)}$

EXERCICE n°2 (type 1)

1°) • α est clairement C^∞ sur $[0, +\infty[$ et on a : $\forall x \geq 0$, $\alpha'(t) = 1 + 2e^{2t} > 0$

Donc α est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Comme de plus $\alpha(0) = 0$ alors $\forall x > 0$, $\alpha(t) > 0$

• Comme $\varphi(t) = \frac{e^t}{\alpha(t)}$ on a alors : $\boxed{\varphi \text{ est définie et continue sur }]0, +\infty[}$

2°) $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } I \iff \int_I |\varphi| \text{ est convergente.}}$

3°) φ est continue sur $]0, 1[$, il faut étudier l'intégrabilité en 0.

Au voisinage de $t = 0$: $\varphi(t) = \frac{e^t}{t+e^{2t}-1} = \frac{1+o(1)}{t+1+2t+o(t)-1} = \frac{1+o(1)}{3t+o(t)} \sim \frac{1}{3t}$

Or $t \mapsto \frac{1}{3t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1[$ par Riemann, donc par équivalent :

$\boxed{\varphi \text{ n'est pas intégrable sur }]0, 1[}$

4°) φ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrabilité de φ sur $[1, +\infty[$ pose problème uniquement en $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$: $\varphi(t) \sim \frac{e^t}{e^{2t}} \sim e^{-t}$

Or $t \mapsto e^{-t}$ est une fonction de référence intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par équivalent φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[}$

EXERCICE n°3 (type 1)

Comme au voisinage de $u = 0$: $\arctan(u) \sim u$ alors $\arctan(\frac{1}{1+n^2}) \sim \frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$

$$\text{Donc } \left| \frac{(-1)^n \arctan(\frac{1}{1+n^2})}{n^3} \right| \sim \frac{\frac{1}{n^2}}{n^3} = \frac{1}{n^5} > 0$$

Comme $\sum \frac{1}{n^5}$ est une série de Riemann convergente ($5 > 1$), alors par équivalent : $\sum \left| \frac{(-1)^n \arctan(\frac{1}{1+n^2})}{n^3} \right|$

est convergente et par absolue convergence : $\boxed{\sum \frac{(-1)^n \arctan(\frac{1}{1+n^2})}{n^3} \text{ est convergente.}}$

EXERCICE n°4 (type 1)

Posons : $\forall t \in]0, 1]$, $f(t) = \frac{\ln(1+t) - \sin(t)}{t^2 \sqrt{\sin(t)}}$

Comme $t^2 \neq 0$ et $\sin(t) \neq 0$ sur $]0, 1]$ alors f est continue sur $]0, 1]$

L'intégrale ne pose problème que en 0.

$$\text{Au voisinage de } t = 0 : f(t) = \frac{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) - (t + o(t^2))}{t^2 \sqrt{\sin(t)}} = \frac{-\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2 \sqrt{\sin(t)}}$$

Comme $\sin(t) \sim t$ et donc $\sqrt{\sin(t)} \sim \sqrt{t}$ on en déduit : $f(t) \sim \frac{-\frac{t^2}{2}}{t^2 \sqrt{t}} = \frac{-1}{2t^{1/2}} > 0$

Mais $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ par Riemann et donc par équivalent, f est intégrable sur $]0, 1]$

$$\text{On en déduit que : } \boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+t) - \sin(t)}{t^2 \sqrt{\sin(t)}} dt}$$

EXERCICE n°5 (type 1)

1°) Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction positive, continue par morceaux, décroissante sur $[a; +\infty[$.

Alors : $\boxed{\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ et } \sum f(n) \text{ sont de même nature.}}$

2°) On reconnaît la forme $\frac{u'}{u^2} = \left(\frac{-1}{u}\right)'$ et on en déduit que :

$$\boxed{t \mapsto \frac{-1}{\ln(t)} \text{ est une primitive de } t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^2} \text{ sur } [2, +\infty[}$$

3°) Soit $A > 2$, alors : $\int_2^A \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt = \left[\frac{-1}{\ln(t)}\right]_2^A = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(2)} \in \mathbb{R}$

On en déduit que : $\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt \text{ est convergente.}}$

4°) Posons : $\forall t > 2$, $f(t) = \frac{1}{t(\ln(t))^2}$

f est dérivable sur $[2, +\infty[$ et $f'(t) = \frac{-(\ln(t))^2 - 2\ln(t)}{t^2(\ln(t))^4} < 0$ donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$ (et positive)

On peut donc appliquer le théorème de comparaison série-intégrale rappelé au 1°) et on en déduit que : $\boxed{\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2} \text{ est convergente.}}$

EXERCICE n°6 (type 1)

1°) • G est libre si et seulement si $[\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k g_k = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0]$

• G est génératrice de E si et seulement si $Vec(G) = E$

$$2^\circ) \text{ a) Au voisinage de } 0 : \begin{cases} f_1(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n) \\ f_2(x) = \ln(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}) \\ f_3(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& 2^\circ) \text{ b) Soit } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \\
& af_1 + bf_2 + cf_3 = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \\
& \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a \ln(1+x) + b \ln(x) + c \frac{1}{1+x} = 0 \quad \text{on fait un DL en 0} \\
& \Rightarrow a(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + b(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + c(1 - x + x^2 + o(x^2)) = 0 \quad \text{unicité du DL} \\
& \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a - c = 0 \\ -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + c = 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = a \\ -\frac{1}{2}a + a = 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow a = b = c = 0
\end{aligned}$$

On en déduit donc que : $\boxed{F \text{ est libre.}}$

Problème : développement asymptotique de la série harmonique (type 1 et 2), source ccINP TPC 2007

$$1) \text{ a) On pose } \begin{array}{ccc} a & : & [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \ln(1-x) \end{array}$$

Alors a est dérivable sur $[0, 1[$ et $a'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \leq 0$
Donc a est décroissante sur $[0; 1[$. Comme $a(0) = 0$ on en déduit : $\forall x \in [0, 1[, a(x) \leq 0$

$$\text{On a donc : } \boxed{\forall x \in [0, 1[, x + \ln(1-x) \leq 0}$$

$$1) \text{ b) On pose } \begin{array}{ccc} b & : & [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \ln(1+x) \end{array}$$

Alors b est dérivable sur $[0, 1[$ et $b'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$
Donc b est croissante sur $[0; 1[$. Comme $b(0) = 0$ on en déduit : $\forall x \in [0, 1[, b(x) \geq 0$

$$\text{On a donc : } \boxed{\forall x \in [0, 1[, x - \ln(1+x) \geq 0}$$

2) • $u_{n+1} - u_n = (S_{n+1} - \ln(n+1)) - (S_n - \ln(n)) = S_{n+1} - S_n + \ln(n) - \ln(n+1)$
Par télescopage : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1} + \ln(1 - \frac{1}{n+1}) = a(\frac{1}{n+1}) \leq 0$
d'après le 1)a)
On en déduit $(u_n)_{n \geq 2}$ décroissante.

• $v_{n+1} - v_n = (S_n - \ln(n+1)) - (S_{n-1} - \ln(n)) = S_n - S_{n-1} + \ln(n) - \ln(n+1)$
Par télescopage : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) = b(\frac{1}{n}) \geq 0$ d'après le 1)b)
On en déduit $(v_n)_{n \geq 2}$ croissante.

$$\bullet u_n - v_n = (S_n - \ln(n)) - (S_{n-1} - \ln(n)) = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\bullet \text{ On a alors : } \begin{cases} (u_n)_{n \geq 2} \text{ est décroissante} \\ (v_n)_{n \geq 2} \text{ est croissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases} \quad \text{et on peut donc conclure que :}$$

$$\boxed{(u_n)_{n \geq 2} \text{ et } (v_n)_{n \geq 2} \text{ sont adjacentes}}$$

$$3) \text{ a) } x_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{Bilan : } \boxed{x_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$3) \text{ b) } \begin{cases} x_n \sim \frac{1}{2n^2} > 0 \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ est une s\u00e9rie de Riemann convergente car } 2 > 1 \end{cases}$$

donc, par r\u00e8gle de l'\u00e9quivalent : $\boxed{\sum x_n \text{ est convergente.}}$

$$3) \text{ c) On a vu en 3)a) que } x_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)\right)$$

$$\text{Pour } N \geq 2 \text{ on a donc par t\u00e9l\u00e9scopage : } \sum_{n=1}^N x_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N+1) = v_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \gamma$$

$$\text{On peut donc en d\u00e9duire que : } \boxed{\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$4) \text{ a) Au voisinage de } x = 0 : f(x) = x - 1 + e^{-x} = x - 1 + \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{On a donc : } \boxed{f(x) \underset{x=0}{\sim} \frac{x^2}{2}}$$

$$4) \text{ b) Pour } x > 0 : g(x) = \frac{f(x)}{x(1-e^{-x})}$$

Mais $1 - e^{-x} = 1 - (1 - x + o(x)) = x + o(x) \sim x$ au voisinage de 0, donc $g(x) \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x \times x} = \frac{1}{2}$

$$\text{On en d\u00e9duit } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2} \text{ et donc } \boxed{g \text{ est prolongeable par continuit\u00e9 en 0 en posant } g(0) = \frac{1}{2}}$$

$$4) \text{ c) On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \text{ donc } \exists A > 0, x \geq A \Rightarrow |g(x)| \leq 2$$

g continue sur $[0, A]$ donc par le th\u00e9or\u00e8me des bornes atteintes, il existe $\tilde{K}$ tel que :
 $\forall x \in [0, A], |g(x)| \leq \tilde{K}$

$$\text{En posant } K = \max(2, \tilde{K}) \text{ on a bien : } \boxed{\forall x \in [0, +\infty[, |g(x)| \leq K \text{ donc } g \text{ est born\u00e9e sur } [0, +\infty[}$$

$$5) \text{ On a } \forall x \geq 0, 0 \leq |g(x)e^{-x}| \leq Ke^{-x}$$

De plus, d'apr\u00e8s le cours : $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente, donc par comparaison :

$$\int_0^{+\infty} |g(x)e^{-x}| dx \text{ est convergente.}$$

$$\text{Par absolue convergence on a alors : } \boxed{I \text{ est convergente.}}$$

$$6) \text{ a) } x \mapsto \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \text{ est continue sur } [1, +\infty[\text{ donc } I_n \text{ pose probl\u00e8me en } +\infty$$

$$\text{On a pour } x \geq 1 : 0 \leq \left| \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \right| \leq e^{-x} + e^{-nx}$$

Mais, d'apr\u00e8s le cours $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-nx}$ sont int\u00e9grables sur $[1, +\infty[$

$$\text{Donc, par comparaison : } x \mapsto \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \text{ est int\u00e9grable sur } [1, +\infty[\text{ et on en d\u00e9duit : } \boxed{I_n \text{ est convergente.}}$$

6) b) i) Par la même démonstration qu'au 6) a) on a que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x} dx$ sont convergentes. Ce sont donc les limites de $J(X)$ et $K_n(X)$

$$\boxed{J(X) \text{ et } K_n(X) \text{ ont donc des limites quand } X \rightarrow +\infty}$$

6) b) ii) On effectue dans $K_n(X)$ le changement de variable $C^1 : u = nx$
On a : $du = n dx$ et $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$ et donc : $K_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-nx}}{x} dx = \int_n^{nX} \frac{e^{-u}}{u} du$

En reposant $u = x$, on a bien :
$$\boxed{K_n(X) = \int_n^{nX} \frac{e^{-x}}{x} dx}$$

6°) b) iii) $I_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$

Par linéarité de l'intégrale : $I_n(X) = J(X) - K_n(X)$

En utilisant le ii) : $I_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_n^{nX} \frac{e^{-u}}{u} du$

Par la relation de Chasles : $I_n(X) = \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_X^{nX} \frac{e^{-x}}{x} dx$

Mais comme $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ est convergente, alors : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_X^{nX} \frac{e^{-x}}{x} dx = 0$

Et donc, comme $I_n = \lim_{X \rightarrow +\infty} I_n(X)$ on obtient :
$$\boxed{I_n = \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx}$$

6) c) Avec le 6°) b) ii) : $I_n = \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_1^n \frac{e^{-x} - 1 + 1}{x} dx$

Comme les intégrales sont sur un segment et qu'elles convergent :
$$I_n = \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x} dx}_{\ln(n)} + \int_1^n \frac{e^{-x} - 1}{x} dx$$

On a donc :
$$\boxed{I_n = \ln(n) - \int_1^n \frac{1 - e^{-x}}{x} dx}$$

7) a) Pour x au voisinage de 0 : $\varphi_t(x) = \frac{(1-x+o(x)) - (1-xt+o(x))}{x} = \frac{(t-1)x+o(x)}{x} = t - 1 + o(1)$
Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_t(x) = t - 1 \in \mathbb{R}$ et $\boxed{\varphi_t \text{ peut être prolongée par continuité en 0}}$

7) b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, φ_t est clairement continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 avec le a).

$F(t) = \int_0^1 \varphi_t(x) dx$ est donc convergente car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Donc $\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

7) c) Posons : $\phi : u \in]0, 1] \mapsto \frac{e^{-u} - 1 + u}{u}$

Alors ϕ est continue sur $]0, 1]$ et, pour u au voisinage de 0 : $\phi(u) = \frac{1 - u + o(u) + u}{u} = o(1)$ donc ϕ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\phi(0) = 0$

On a donc une ϕ qui est une fonction continue sur segment et on peut lui appliquer le théorème des bornes atteintes pour obtenir $\exists M > 0$, $\forall v \in [0, 1]$, $|\phi(v)| \leq M$

Pour $h \in [-1, 1]$ et $x \in [0, 1]$ on pose $v = hx \in [0, 1]$ et on distingue deux cas.

Cas 1 : Si $v = 0$ alors $|e^{-hx} - 1 + hx| = 0 \leq Mh^2x^2$

Cas 2 : Si $v \neq 0$ alors $|\phi(v)| \leq M \Rightarrow \left| \frac{e^{-hx} - 1 + hx}{hx} \right| \leq M \Rightarrow |e^{-hx} - 1 + hx| \leq Mh^2x^2$

On a donc : $\boxed{\forall h \in [-1, 1], \forall x \in [0, 1], |e^{-hx} - 1 + hx| \leq Mh^2x^2}$

7) d) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1, 0[\cup]0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_0^1 e^{-xt} dx &= \int_0^1 \left(\frac{\frac{e^{-x} - e^{-x(t+h)}}{x} - \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}}{h} - e^{-xt} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{e^{-xt} - e^{-xt} e^{-xh}}{xh} - e^{-xt} \right) dx \\ &= \int_0^1 e^{-xt} \left(\frac{1 - e^{-xh}}{xh} - 1 \right) dx \end{aligned}$$

Mais, avec le 7)c) $\left| \frac{1 - e^{-xh}}{xh} - 1 \right| \leq \frac{Mh^2x^2}{|xh|} = M|h|$

On a alors, avec l'inégalité de la moyenne : $\boxed{\left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_0^1 e^{-xt} dx \right| \leq M|h| \int_0^1 e^{-xt} dx}$

7) e) En faisant tendre h vers 0 dans le 7)d) on obtient : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \int_0^1 e^{-xt} dx$

On en déduit que F est dérivable en t et que $F'(t) = \int_0^1 e^{-xt} dx$

Ce résultat étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, F'(t) = \int_0^1 e^{-xt} dx}$

7) f) Comme $e^{-x} - e^{-x} = 0$ on a directement : $\boxed{F(1) = 0}$

7) g) Pour $t \neq 0$: $F'(t) = \int_0^1 e^{-xt} dx = \left[\frac{e^{-xt}}{-t} \right]_0^1 = \frac{e^{-t}}{-t} + \frac{1}{t} = \frac{1 - e^{-t}}{t}$

On a : $F(t) - F(1) = \int_1^t F'(x) dx$ et avec l'expression ci-dessus, en tenant compte du fait que $F(1) = 0$:

$$\boxed{F(t) = \int_1^t \frac{1 - e^{-x}}{x} dx}$$

8) a) Déjà fait. On a : $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx \text{ est convergente}}$

8) b) Avec le 6)c), on a : $I_n = \ln(n) - \int_1^n \frac{1 - e^{-x}}{x} dx = \ln(n) - F(n)$ avec le 7)g)

Si on reprend la définition de F on obtient : $\boxed{I_n = \ln(n) - \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx}$

8) c) Comme par définition $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} dx$ alors avec le 8) b) :

$$\begin{aligned} \ln(n) - \int_0^1 \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} dx \\ \Rightarrow \ln(n) &= \int_0^1 \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} dx \end{aligned}$$

et par la relation de Chasles : $\boxed{\ln(n) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} dx}$

9) a) Remarque : On a : $\forall x \geq 0$, $|(e^{-x} - e^{-nx})g(x)| \leq K(e^{-x} - e^{-nx})$
Comme $x \mapsto e^{-x} - e^{-nx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ on en déduit L_n convergente (ce qui est sous entendu et non demandé)

$$\text{On a } L_n - I = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx})g(x)dx - \int_0^{+\infty} e^{-x}g(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-nx}g(x)dx$$

Puisque $|g(x)| \leq K$ on a part l'inégalité de la moyenne :

$$|L_n - I| \leq \int_0^{+\infty} K e^{-nx} dx = [-K \frac{e^{-nx}}{n}]_0^{+\infty} = \frac{K}{n}$$

On a donc : $\boxed{|L_n - I| \leq \frac{K}{n}}$

9) b) Avec le 9) a) et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K}{n} = 0$ on obtient : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = I}$

9) c) Comme $g(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$ alors :

$$L_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} \right) dx$$

Donc puisque les intégrales sont convergentes :

$$L_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{1-e^{-x}} dx - \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} \right) dx$$

On utilise le 8)c) pour la deuxième intégrale et on obtient :

$$L_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{1-e^{-x}} dx - \ln(n)$$

On remarque que : $\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{1-e^{-x}} = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-kx}$ puisque l'on a la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{-x} \neq 1$ pour $x \neq 0$

$$\text{Donc } L_n = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-kx} dx - \ln(n)$$

La somme est finie et les intégrales convergentes donc : $L_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx - \ln(n)$

$$\text{Mais } \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \left[\frac{e^{-kx}}{-k} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{k}$$

$$\text{Donc } L_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) = S_{n-1} - \ln(n) = v_n \text{ et donc } \boxed{L_n = v_n}$$

9) d) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \gamma$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = I$ alors $I = \gamma$ et donc $\boxed{\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) dx}$

Problème : Comportement asymptotique des restes d'une série numérique convergente (type 2)

1) a) Posons : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Comme $\sum u_n$ est convergente alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$
Donc $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda - \lambda = 0$

On a bien : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

1) b) Posons $\rho_n = \sum_{k \geq n} u_k$ alors, comme la série $\sum u_n$ est convergente on a : $\rho_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)$

Mais comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) = 0$

On a donc : la suite de terme général $\sum_{k \geq n}^{+\infty} u_k$ est convergente et sa limite est nulle.

2) a) D'après le cours : $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $|r| < 1$

2) b) D'après le cours : $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} r^k = \frac{r^n}{1-r}$

3) a) On a : $\frac{2n}{n^4+n^2+2} \sim \frac{2n}{n^4} \sim \frac{2}{n^3}$, donc $\frac{2n}{n^4+n^2+2} = \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Donc $u_n = \arctan\left(\frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$ et comme au voisinage de 0 : $\arctan(u) = u + o(u)$ on a : $u_n = \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

On a donc : $\begin{cases} u_n \sim \frac{2}{n^3} > 0 \\ \sum \frac{1}{n^3} \text{ est une série de Riemann convergente puisque } 3 > 1 \end{cases}$

On peut donc appliquer la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs et on en déduit :

$\sum u_n$ est convergente.

3) b) Cherchons P et Q sous la forme : $P = X^2 + aX + b$ et $Q = X^2 + cX + d$

Alors : $\begin{cases} P(X) - Q(X) = 2X \\ P(X)Q(X) = X^4 + X^2 + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-c)X + b - d = 2X \\ X^4 + (a+c)X^3 + (ac+b+d)X^2 + (ad+bc)X + bd = X^4 + X^2 + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-c=2 \\ b-d=0 \\ a+c=0 \\ ac+b+d=1 \\ ad+bc=0 \\ bd=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=b \\ c=-a \\ a-c=2 \\ ac+b+d=1 \\ ad+bc=0 \\ bd=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=-1 \\ d=b \\ -1+2b=1 \\ d-b=0 \\ b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=-1 \\ d=b=1 \\ 0=0 \\ 1=1 \end{cases}$

Finalement : $P = X^2 + X + 1$ et $Q = X^2 - X + 1$ conviennent.

3) c) Fixons $y > 0$ et posons $\forall x \geq 0$, $\theta(x) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) - (\arctan(x) - \arctan(y))$

Alors θ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned}\theta'(x) &= \frac{\frac{(1+xy)-y(x-y)}{(1+xy)^2}}{1+(\frac{x-y}{1+xy})^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+y^2}{(1+xy)^2+(x-y)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+y^2}{1+2xy+x^2y^2+x^2-2xy+y^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

On a donc θ constante sur $[0, +\infty[$ et comme $\theta(0) = 0$ alors $\theta(x) = 0$ pour tout $x > 0$

On en déduit : $\boxed{\forall x > 0, \forall y > 0, \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan(x) - \arctan(y)}$

3) d) On remarque que : $u_k = \arctan\left(\frac{P(k)-Q(k)}{1+P(k)Q(k)}\right)$

Avec le c), on a donc que : $u_k = \arctan(P(k)) - \arctan(Q(k))$

$$\text{Mais } Q(X+1) = (X+1)^2 - (X+1) + 1 = X^2 + 2X + 1 - X - 1 + 1 = X^2 + X + 1 = P(X)$$

$$\text{Donc } u_k = \arctan(Q(k+1)) - \arctan(Q(k))$$

Par télescopage on a alors, pour $N > n$:

$$\sum_{k=n}^N u_k = \sum_{k=n}^N (\arctan(Q(k+1)) - \arctan(Q(k))) = \arctan(Q(N+1)) - \arctan(Q(n))$$

$$\text{Comme } \lim_{N \rightarrow +\infty} Q(N+1) = +\infty \text{ on a } \lim_{N \rightarrow +\infty} \arctan(Q(N+1)) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{De plus } Q(n) = n^2 - n + 1$$

$$\text{On en déduit que : } \boxed{\sum_{k=n}^N u_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 - n + 1)}$$

3) e) On utilise que : $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ et on a :

$$\sum_{k=n}^N u_k = \arctan\left(\frac{1}{n^2-n+1}\right) \sim \frac{1}{n^2-n+1} \sim \frac{1}{n^2} > 0$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente, on a par la règle de l'équivalent que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \right) \text{ est convergente.}}$$

4) Comme $x > 1$ on peut choisir $\gamma \in]1, x[$

$$\text{On a alors : } \frac{\frac{\ln(n)}{n^x}}{\frac{1}{n^\gamma}} = \frac{\ln(n)}{n^{x-\gamma}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ puisque } x - \gamma > 0$$

$$\text{On en déduit : } \frac{\ln(n)}{n^x} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

Mais $\frac{1}{n^\gamma} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est une série de Riemann convergente puisque $\gamma > 1$

$$\text{Alors, par négligeabilité : } \boxed{\sum \frac{\ln(n)}{n^x} \text{ est convergente.}}$$

5) a) Soit $\alpha > a$ alors par intégration par partie, en dérivant $\ln(t)$:

$$\int_a^\alpha \frac{\ln(t)}{t^x} dt = \left[\frac{1}{(-x+1)t^{x-1}} \ln(t) \right]_a^\alpha - \int_a^\alpha \frac{1}{(-x+1)t^{x-1}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{(-x+1)\alpha^{x-1}} \ln(\alpha) - \frac{1}{(-x+1)a^{x-1}} \ln(a) + \frac{1}{(x-1)} \int_a^\alpha \frac{1}{t^x} dt$$

Comme $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$ est convergente par Riemann, et que la limite du crochet existe dans $\mathbb{R}$ puisque

$$x-1 > 0, \text{ on en déduit que } \int_a^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt \text{ est convergente et que : } \int_a^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt = \frac{\ln(a)}{(x-1)a^{x-1}} + \frac{1}{x-1} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$$

$$\text{Mais } \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(-1+x)t^{x-1}} \right]_a^\alpha = \frac{1}{(x-1)a^{x-1}} \text{ (puisque } x-1 > 0$$

$$\text{Donc } \int_a^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dt = \frac{\ln(a)}{(x-1)a^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2 a^{x-1}}$$

$$\text{En utilisant que } \frac{1}{a^{x-1}} = a^{1-x}, \text{ on en déduit : } \boxed{\forall a > 0, \int_a^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x} dx = \frac{a^{1-x} (1 + (x-1)\ln(a))}{(x-1)^2}}$$

5) b) Posons $\forall t > 0, p(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$

Alors p est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $p'(t) = \frac{1}{t} \frac{1}{t^x} + \ln(t) \frac{-x}{t^{x+1}} = \frac{1-x\ln(t)}{t^{x+1}}$

Mais $t > 4 \Rightarrow t > e \Rightarrow \ln(t) > 1 \Rightarrow x\ln(t) > 1$ puisque $x > 1$ et donc $1 - x\ln(t) < 0$

On en déduit $p'(t) < 0$ sur $[4, +\infty[$ et donc p décroissante sur $[4, +\infty[$

Donc $\forall k \geq n \geq 4$ on a : $\forall t \in [k, k+1], p(k+1) \leq p(t) \leq p(k)$

En intégrant sur $[k, k+1]$ on obtient : $p(k+1) \leq \int_k^{k+1} p(t) dt \leq p(k)$

• Si on somme l'inégalité de droite pour p variant de n à $N > n > 4$, on obtient :

$$\sum_{k=n}^N \int_k^{k+1} p(t) dt \leq \sum_{k=n}^N p(k) \text{ et avec Chasles : } \int_n^{N+1} \leq \sum_{k=n}^N p(k)$$

Comme l'intégrale est convergente on en déduit, en faisant tendre N vers $+\infty$, que : $\int_n^{+\infty} p(t) dt \leq r_n$

• Si on somme l'inégalité de gauche pour p variant de $n-1$ à $N-1$ avec $N > n > 5$, on obtient :

$$\sum_{k=n-1}^{N-1} p(k+1) \leq \sum_{k=n-1}^{N-1} \int_k^{k+1} p(t) dt$$

$$\text{Avec changement d'indice et Chasles : } r_n \leq \int_n^{N+1} \leq \int_{n-1}^N p(t) dt$$

Comme l'intégrale est convergente on en déduit, en faisant tendre N vers $+\infty$, que : $r_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} p(t) dt$

• En regroupant les deux derniers résultat et avec la définition de $p(t)$, on a : $\boxed{\int_n^{+\infty} p(t) dt \leq r_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} p(t) dt}$

5) c) En combinant le 5)a et le 5)b, on a : $\frac{(1+(x-1)\ln(n))}{(x-1)^2 n^{x-1}} \leq r_n \leq \frac{(1+(x-1)\ln(n-1))}{(x-1)^2 (n-1)^{x-1}}$

Mais $n-1 \sim n$ donc $(n-1)^{x-1} \sim n^{x-1}$ et $\ln(n-1) \sim \ln(n)$ donc :

$$\frac{(1+(x-1)\ln(n))}{(x-1)^2 n^{x-1}} \sim \frac{(1+(x-1)\ln(n-1))}{(x-1)^2 (n-1)^{x-1}} \sim \frac{(x-1)\ln(n)}{(x-1)^2 n^{x-1}} = \frac{\ln(n)}{(x-1)n^{x-1}}$$

Avec la double inégalité ci-dessus, on en déduit : $r_n \sim \frac{\ln(n)}{(x-1)n^{x-1}}$

6) Comme a_n et b_n sont non nuls que $a_n \sim b_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

Donc $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\frac{b_n}{a_n} \leq 2$ (par définition de la limite)

Comme $a_n > 0$ on a donc pour $n \geq N$, $0 \leq b_n \leq 2a_n$

Comme $\sum a_n$ et donc $\sum 2a_n$ est convergente, on a alors, par comparaison : $\sum b_n$ est convergente.

7) a) Par définition de la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, on a, puisque $b_n > 0$:

$$\text{il existe } N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow, (1 - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon)b_n$$

7) b) En sommant les inégalités du a) de $n \geq N$ à $+\infty$ on obtient :

$$n \geq N \Rightarrow, (1 - \varepsilon)B_n \leq A_n \leq (1 + \varepsilon)B_n \Rightarrow, \left| \frac{A_n}{B_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

Ce qui donne par définition de la limite que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{B_n} = 1$ et donc que : $A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} B_n$

8) a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Donc, par télescopage, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geq n$, on a : $\sum_{k=n}^N \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ est convergente et vaut $\frac{1}{n}$

En particulier, pour $n = 1$ on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ qui est convergente.

$$\text{Bilan : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ est convergente et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n}$$

8) b) Comme $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ alors, avec le 7) : $\sum_{k=n} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$

Et avec le calcul du a) : $\sum_{k=n} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$

9) Comme f est dérivable sur $[0, +\infty[$ on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[t, t+1]$ et on a : $\exists c \in]t, t+1[$, $f(t+1) - f(t) = f'(c)(t+1 - t) = f'(c)$

Mais comme f est convexe, alors f' est croissante et donc $t \leq c \Rightarrow f'(t) \leq f'(c)$

Donc $f'(t) \leq f(t+1) - f(t)$ ce qui donne : $f(t) - f(t+1) \leq -f'(t)$

Comme f est décroissante alors $f(t+1) \leq f(t)$ donc $0 \leq f(t) - f(t+1)$

Enfin : $0 \leq f(t) - f(t+1) \leq -f'(t)$ et comme $f(t) > 0$, on peut diviser par $f(t)$ et on obtient :

$$\forall t > 0, 0 \leq \frac{f(t) - f(t+1)}{f(t)} \leq -f'(t)$$

10) a) Comme $f(n) > 0$, $\sum u_n$ est une série alternée. Comme par hypothèse sur f , $(|u_n|) = (f(n))$ est décroissante et de limite nulle, on peut appliquer le théorème spécial et on a :

$$\sum u_n \text{ est convergente.}$$

10) b) • $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k f(k)$ on fait le changement d'indice $p = k - n$

$$r_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+n} f(p+n) = (-1)^n \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(p+n)$$

$$\text{Donc } |r_n| = \left| \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(p+n) \right|$$

Par le théorème spéciale on sait que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^p f(p+n)$ est du signe de son premier terme,

ici $f(n)$, donc positif. On peut enlever la valeur absolue ci-dessus et on a donc : $|r_n| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(p+n)$

• Avec ce résultat :

$$|r_n| - |r_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(p+n) - \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(p+n+1) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (f(p+n) - f(p+n+1))$$

Posons $F_p = f(p+n) - f(p+n+1)$ alors $F_p \geq 0$ puisque f est décroissante.

$$\begin{aligned} & F_{p+1} - F_p \\ &= (f(p+1+n) - f(p+1+n+1)) - (f(p+n) - f(p+n+1)) \\ &= f(p+n+1) - f(p+n+2) - f(p+n) + f(p+n+1) \\ &= -f(p+n+2) - f(p+n) \leq 0 \text{ puisque } f \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

Donc $(F_p)_{p \geq 0}$ est décroissante.

On peut donc appliquer le théorème spécial à la série alternée $\sum (-1)^p F_p$

Le premier terme vaut $F_0 = f(n) - f(n+1) \geq 0$ car f décroissante

$$\text{donc } 0 \leq \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (f(p+n) - f(p+n+1)) \leq F_0 = f(n) - f(n+1)$$

On a donc : $0 \leq |r_n| - |r_{n+1}| \leq f(n) - f(n+1)$

$$\bullet \text{ Bilan : } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} i) & |r_n| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(n+p) \\ ii) & 0 \leq |r_n| - |r_{n+1}| \leq f(n) - f(n+1) \end{cases}$$

10) c) r_n est le reste d'une série alternée qui vérifie le théorème spécial. On sait donc que r_n est de signe alterné et donc que $\sum r_n$ est alternée.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ car on a le reste d'une série convergente.

De plus, avec le point ii) de la question précédente, on a $(|r_n|)$ qui est une suite décroissante.

On peut donc encore appliquer le théorème spécial et on a : $\boxed{\sum r_n \text{ est convergente.}}$

$$10) d) u_k - u_{k+1} = (-1)^k f(k) - (-1)^{k+1} f(k+1) = 2(-1)^k f(k) - (-1)^k (f(k) - f(k+1))$$

On somme de $k = n$ à $+\infty$ et on obtient (téléscopage à gauche) :

$$\begin{aligned} u_n - 0 &= 2 \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k f(k) - \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k (f(k) - f(k+1)) \\ \Rightarrow u_n &= 2r_n - \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k (f(k) - f(k+1)) \end{aligned}$$

Par le critère des séries alternées : $\left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k (f(k) - f(k+1)) \right| \leq f(n) - f(n+1)$

mais $f(n) - f(n+1) = \frac{f(n)-f(n+1)}{f(n)} f(n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)-f(n+1)}{f(n)} = 0$ avec le 9) et l'hypothèse donnée sur f .

Donc $f(n) - f(n+1) = o(f(n)) = o(u_n)$

On donc $u_n = 2r_n + o(u_n) \Rightarrow r_n = \frac{u_n}{2} + o(u_n)$ et on déduit : $\boxed{r_n \sim \frac{u_n}{2}}$

11) a) Discutons en distinguant plusieurs cas selon la valeur de x , la convergence de $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$

Cas 1 : $x < 0$
Alors $\left| \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et donc la série est grossièrement divergente.

Cas 2 : $x = 0$
Alors $\left| \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x} \right| = \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et donc la série est encore grossièrement divergente.

Cas 3 : $x > 0$

On pose $\forall u > 0$, $g(u) = \frac{\ln(u)}{u^x}$
 g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(u) = \frac{1-x\ln(u)}{u^{x+1}} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} -\infty$ puisque $x > 0$

Donc $g'(u) \leq 0$ à partir d'un certain rang.

Par comparaison $\ln$ puissance on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = 0$

Comme $g(n)$ est décroissante à partir d'un certain rang alors on peut appliquer le théorème spécial et on a : $\sum (-1)^n g(n)$ qui est convergente.

Bilan : $\boxed{\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x} \text{ est convergente si et seulement si } x > 0}$

11) b) $\frac{g'(u)}{g(u)} = \frac{\frac{1-x\ln(u)}{u^{x+1}}}{\frac{\ln(u)}{u^x}} = \frac{1-x\ln(u)}{u\ln(u)} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$

A partir d'un certain rang g vérifie les mêmes hypothèse que f dans la question 10). Comme au s'intéresse à des propriétés asymptotique on peut appliquer le résultat du 10) d) et on a :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x} \sim (-1)^n \frac{\ln(n)}{2n^x}}$$

12) a) Posons, pour $n \geq 2$, $z_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Alors $z_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On pose $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Par le théorème spécial on a directement $\sum y_n$ est convergente.

On pose : $Y_n = z_n - y_n$, on a donc $Y_n \sim \frac{1}{n^2} < 0$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente par Riemann, alors $\sum Y_n$ est convergente par équivalent.

Comme $z_n = y_n + Y_n$ avec $\sum y_n$ et $\sum Y_n$ convergentes alors $\sum z_n$ est convergente.

Bilan : $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \text{ est convergente.}}$

12) b) On a $z_n = \frac{(-1)^n}{n} + Y_n$ donc, comme les séries convergent :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} z_k = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n}^{+\infty} Y_k$$

Comme $Y_k \sim \frac{-1}{k^2}$ on a, d'après la question 8) b) : $\sum_{k=n}^{+\infty} Y_k \sim \frac{-1}{n}$

Si on pose $f(t) = \frac{1}{t}$ alors $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{-1/t^2}{1/t} = \frac{-1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

De plus f est décroissante, de limite nulle et convexe.

On peut donc appliquer le 10)d) et on a : $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sim \frac{(-1)^n}{2n}$

On en déduit $\sum_{k=n}^{+\infty} z_k = \frac{(-1)^n}{2n} + o(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \Rightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} z_k - \frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$

Par l'absurde si $\sum_{k=n}^{+\infty} z_k$ était le terme général d'une série convergente, alors, comme $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, on aurait : $\sum_{k=n}^{+\infty} z_k - \frac{(-1)^n}{2n}$ qui serait le terme général d'une série convergente.

Mais ce terme est équivalent à $\frac{-1}{n} < 0$ et $\sum \frac{-1}{n}$ est divergente !!!! Absurde

Bilan : La série de terme général $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ est divergente.