

Chapitre 6 : Compléments espaces vectoriels, endomorphismes, matrices

Remarque préliminaire : dans ce chapitre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Produit d'espaces vectoriels

1.1 Espace vectoriel produit

Lemme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, +_1, \times_1)$, $(E_2, +_2, \times_2)$, ... et $(E_n, +_n, \times_n)$ des K espaces vectoriels.

Alors $E = E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$ muni :

de la loi interne $+$ définie par

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, $\forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E$ $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 +_1 y_1, x_2 +_2 y_2, \dots, x_n +_n y_n)$
et de la loi externe $\times$ définie par $\forall \lambda \in K$, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, $\lambda \times (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \times_1 x_1, \lambda \times_2 x_2, \dots, \lambda \times_n x_n)$

est un K espace vectoriel.

preuve : admis ici parce que longue ...

Exemples. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) = (\mathbb{R}, +, \cdot) \times (\mathbb{R}, +, \cdot)$ $(\mathbb{R}^5, +, \cdot) = (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \times (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

Remarque. Les E_i peuvent être de dimension quelconques ...

1.2 Dimension

Lemme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \dots$ et E_n des K espace vectoriel de dimensions finies.

Alors $E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$ est un K espace vectoriel de dimension finie et $\dim(E_1 \times E_2 \cdots \times E_n) = \sum_{k=1}^n \dim(E_k)$

preuve : On montre le principe pour $n = 2$...

2 Somme de sous espaces vectoriels

2.1 Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe on généralise la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de sous espaces vectoriels de E .

Alors on pose $F_1 + F_2 + \dots + F_n = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k, \forall k \in \{1..n\}, x_k \in F_k\}$

Lemme. $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est un sous espace vectoriel de E

preuve :

Remarques. On note aussi : $F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{k=1}^n F_k$.

On a $\sum_{k=1}^n F_k = \text{vect}(\bigcup_{k=1}^n F_k)$

$F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est le plus petit sous espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant tout les F_i

2.2 Somme directe

2.2.1 Cas général

Définition. La somme F de p sous-espaces vectoriels F_i est directe si tout vecteur de F se décompose de manière unique selon les F_i . Autrement dit :

$$\forall x \in F = F_1 + \dots + F_p, \exists!(x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p, \quad x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

Remarque. Si la somme est directe on note : $F = F_1 + F_2 + \dots + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$

Lemme. (Caractérisation de la somme directe)

$F_1 + \dots + F_p$ est en somme **directe**

si et seulement si $\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_p = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_p = \vec{0}$

preuve :

2.2.2 Cas particulier de deux sous espaces vectoriels

Théorème . Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E . Alors on a équivalence des propositions suivantes :

i) F et G sont en somme directe.

ii) $F \cap G = \{\vec{0}\}$

iii) $\forall f \in F, \forall g \in G \quad f + g = \vec{0} \Rightarrow f = g = \vec{0}$

iv) $\forall (f, f') \in F^2, \forall (g, g') \in G^2, \quad f + g = f' + g' \Rightarrow f = f' \text{ et } g = g'$

Définition. Si $E = F \oplus G$ on dit que F et G sont **supplémentaires dans E**

2.2.3 Exemple

Lemme. $S_n(K)$ et $A_n(K)$ sont des sous espaces vectoriels **supplémentaires** dans $M_n(K)$.

C'est-à-dire que : $M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)$

preuve :

2.3 Base adaptée à une somme directe

Lemme. On considère $F_1, F_2, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie qui sont en somme directe.

On considère pour tout k dans $\{1..p\}$, $(f_{k,1}, \dots, f_{k, \dim(F_k)})$ une base de F_k .

Alors on obtient une base de $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ par réunion des bases des sous espaces F_k , c'est-à-dire que $(f_{1,1}, \dots, f_{1, \dim(F_1)}, f_{2,1}, \dots, f_{2, \dim(F_2)}, \dots, f_{p,1}, \dots, f_{p, \dim(F_p)})$ est une base de F .

On a alors $\dim(\bigoplus_{i=1}^p F_i) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ et on dit que cette base est **adaptée à la somme directe**.

Remarque. En particulier si $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$

alors $\dim(F) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_p)$.

En particulier si $E = F \oplus G$ alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

preuve :

2.4 Partition d'une base

Lemme. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie possédant une base $\mathcal{B}$ que l'on fractionne ainsi :

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_{p_1}}_{\mathcal{B}_1}, \underbrace{e_{p_1+1}, \dots, e_{p_1+p_2}}_{\mathcal{B}_2}, \dots, \dots, \underbrace{e_{p_1+\dots+p_{n-1}+1}, \dots, e_{p_1+p_2+\dots+p_n}}_{\mathcal{B}_n}).$$

$$\text{Considérons les sous-espaces vectoriels} \begin{cases} E_1 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p_1}) \\ E_2 = \text{Vect}(e_{p_1+1}, \dots, e_{p_1+p_2}) \\ \vdots \\ E_n = \text{Vect}(e_{p_1+\dots+p_{n-1}+1}, \dots, e_{p_1+p_2+\dots+p_n}) \end{cases}$$

Alors on a la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.

Exemple. $\mathbb{R}_3[X] = Vect(1, X) \oplus Vect(X^2, X^3)$ puisque $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

2.5 Dimension d'une somme

Lemme. Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Alors : $\dim(\sum_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n \dim(E_i)$

et la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est **directe** si et seulement si $\dim(\sum_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \dim(E_i)$

preuve :

3 Matrices par blocs

3.1 Présentation

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_{n,p}(K)$, et soit $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $1 < q < n$ et $1 < r < p$

En notant A_1 la matrice de $M_{q,r}(K)$ de (i, j) ième terme $a_{i,j}$,
 en notant A_2 la matrice de $M_{q,p-r}(K)$ de (i, j) ième terme $a_{i,j+r}$,
 en notant A_3 la matrice de $M_{n-q,r}(K)$ de (i, j) ième terme $a_{i+q,j}$
 et en notant A_4 la matrice de $M_{n-q,p-r}(K)$ de (i, j) ième terme $a_{i+q,j+r}$,

on peut écrire $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ et on dit que l'on a écrit A par blocs.

Remarque. On peut augmenter le nombre de blocs.

3.2 Opérations par blocs

3.2.1 Combinaison linéaire et transposition

Lemme. Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ deux matrices découper en blocs comme dans le paragraphe précédent, soit $\lambda \in K$.

Alors $A + \lambda B = \begin{pmatrix} A_1 + \lambda B_1 & A_2 + \lambda B_2 \\ A_3 + \lambda B_3 & A_4 + \lambda B_4 \end{pmatrix}$ et $A^T = \begin{pmatrix} A_1^T & A_3^T \\ A_2^T & A_4^T \end{pmatrix}$

3.2.2 Produit

Lemme. Si l'on écrit par blocs les deux matrices $A \in M_{n,p}(K)$ et $B \in M_{p,q}(K)$ sous la forme

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ de format $\begin{pmatrix} (n_1, p_1) & (n_1, p_2) \\ (n_2, p_1) & (n_2, p_2) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ de format $\begin{pmatrix} (p_1, q_1) & (p_1, q_2) \\ (p_2, q_1) & (p_2, q_2) \end{pmatrix}$

où $n_1, n_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ sont des entiers strictement positifs tels que $\begin{cases} n = n_1 + n_2 \\ p = p_1 + p_2 \\ q = q_1 + q_2 \end{cases}$ on peut effectuer le produit AB

sous la forme $AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$ de format $\begin{pmatrix} (n_1, q_1) & (n_1, q_2) \\ (n_2, q_1) & (n_2, q_2) \end{pmatrix}$

Remarque. Si les formats sont compatibles on peut découper en plus de blocs ...

3.2.3 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Lemme. Soit $A \in M_p(K)$, $B \in M_{p,q}(K)$, $C \in M_q(K)$ alors : $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{M_{q,p}(K)} & C \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(C)$

3.3 Projections et symétries

3.3.1 Définitions

Définitions. Soit $s \in L(E)$. Alors on dit que : s est une **symétrie** $\Leftrightarrow s \circ s = Id_E$

Soit $p \in L(E)$. Alors on dit que : p est un **projecteur** $\Leftrightarrow p \circ p = p$

3.3.2 Projecteurs

On se place dans E un K espace vectoriel.

Théorème . Soit p un projecteur de E . Alors $E = \ker(p - Id_E) \oplus \ker(p) = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

On dit que p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Dans une base adaptée, p a une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_q & 0_{M_{q,n-q}(K)} \\ 0_{M_{n-q,q}(K)} & 0_{M_{n-q}(K)} \end{pmatrix}$$

Remarque. Si $E = A \oplus B$ alors $\forall x \in E \exists!(a, b) \in A \times B$, $x = a + b$ et l'application qui à x associe a est la projection sur A parallèlement à B .

DESSIN :

preuve :

3.3.3 Symétries

Théorème . Soit s une symétrie de E . Alors $E = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E)$.

On dit que s est la symétrie par rapport à $\ker(s - Id_E)$ parallèlement à $\ker(s + Id_E)$.

Dans une base adaptée, s a une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_q & 0_{M_{q,n-q}(K)} \\ 0_{M_{n-q,q}(K)} & -I_{n-q} \end{pmatrix}$$

preuve :

Remarque. Si $E = A \oplus B$ alors $\forall x \in E \exists!(a, b) \in A \times B$, $x = a + b$ et l'application qui à x associe $a - b$ est la symétrie sur A parallèlement à B .

DESSIN :

3.4 Sous espace vectoriel stable

3.4.1 Définition

Définitions. Soit u un endomorphisme d'un K espace vectoriel E et F un sous espace vectoriel de E .

Alors on dit que F est stable par u si et seulement si $\forall x \in F$, $u(x) \in F$

L'endomorphisme de F :
$$\begin{array}{ccc} u|_F & : & F \longrightarrow F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$
 est alors appelé *endomorphisme induit par u sur F* .

Remarque. On écrit aussi $u(F) \subset F$

3.4.2 Un exemple

Lemme. Soit u et v deux endomorphismes d'un K espace vectoriel E .

Alors, si u et v commutent, le noyau de u est stable par v .

3.4.3 Interprétation matricielle

Soit u un endomorphisme d'un K espace vectoriel E et F un sous espace vectoriel de E stable par u .

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F que l'on complète en $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On a alors une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$ (avec $G = \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$)

La matrice de u dans cette base est alors triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme :
$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

3.5 Matrices diagonales par blocs

3.5.1 Cas général

Lemme. Soit E un K espace vectoriel de dimension n , muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$.
Soit $(p_1, p_2, \dots, p_q) \in (\mathbb{N}^*)^q$ tel que $p_1 + p_2 + \dots + p_q = n$

Si $f \in L(E)$ admet relativement à B la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_q \end{pmatrix}$$

avec $\forall k \in \llbracket 1; q \rrbracket$, $A_k \in M_{p_k}(K)$, alors les sous-espaces vectoriel $F_k = \text{Vect}(e_{p_1+\dots+p_{k-1}+1}, \dots, e_{p_1+\dots+p_k})$ sont stables par f et $E = \bigoplus_{k=1}^q F_k$

3.5.2 Réciproquement

Lemme. Si $f \in L(E)$ un K espace vectoriel de dimension finie tel que : $E = \bigoplus_{k=1}^q F_k$ et si les F_k sont stables par

f , alors, dans une base adaptée à cette somme directe la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_q \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$\forall k \in \llbracket 1; q \rrbracket$ $A_k \in M_{\dim(F_k)}(K)$

3.5.3 Cas particulier d'une matrice triangulaire

Lemme. Soit E un K espace vectoriel de n , muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $f \in L(E)$ telle que la matrice de f relativement à B soit triangulaire supérieure.

Alors les sous-espaces vectoriels $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ forment une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-espaces stables de f .

4 Trace

4.1 Trace d'une matrice

Définition. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(K)$.

Alors on appelle trace de A et on note $\text{tr}(A)$ le scalaire suivant : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$

Exemples. $\text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right) = \text{tr}(I_n) =$

4.2 Propriétés

Propriétés. Soit A et B deux matrices de $M_n(K)$, soit $\lambda \in K$. Alors :

$$\begin{cases} i) \text{tr}(A + \lambda B) = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B) \\ ii) \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \\ iii) \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A) \end{cases}$$

preuve :

4.3 Corollaires

Corollaire. La trace est une forme linéaire.

Corollaire. Deux matrices semblables ont même trace.

Remarque. On dit que deux matrices A et B de $M_n(K)$ sont semblables si et seulement si $\exists P \in GL_n(K)$, $A = PBP^{-1}$

preuve :

4.4 Trace d'un endomorphisme

4.4.1 Définition

Définition. Soit u un endomorphisme d'un K espace vectoriel E de dimension finie.

Alors on appelle trace de u et on note $tr(u)$ la valeur suivante : $tr(u) = tr(Mat_B(u))$ ou B est une base quelconque de E .

preuve de l'indépendance vis à vis de B dans la définition.

4.4.2 Propriétés

Proposition. Soit E un K espace vectoriel de dimension finie.

i) tr est une forme linéaire sur $L(E)$.

ii) $\forall (u, v) \in L(E)^2$, $tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$

Remarque. Si $u \in L(E)$ et $v \in GL(E)$ alors $tr(v \circ u \circ v^{-1}) = tr(u)$

4.4.3 Exemple

Exemple. Trace d'un projecteur.

Lemme. Si p est un projecteur d'un K espace vectoriel de dimension finie alors : $rg(p) = tr(p)$

5 Polynômes de matrices et d'endomorphismes

5.1 Puissances d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Définition. Si u est un endomorphisme de E on définit la suite des puissances de u par :

$$\begin{cases} u^0 = Id_E \\ \forall k \in \mathbb{N}, u^{k+1} = u \circ u^k \end{cases}$$

Remarque. De même si $A \in M_n(K)$ on définit $A^0 = I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A \times A^k$

Exercice. Montrer que la suite des noyaux $Ker(u^k)$ est croissante pour l'inclusion, et que la suite des images $Im(u^k)$ est décroissante.

5.2 Polynômes d'un endomorphisme

Définition. Si u est un endomorphisme et si $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in K[X]$ alors on pose :

$$P(u) = \sum_{k=0}^N a_k u^k = a_0 Id_E + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_N u^N$$

Remarques. On dit que $P(u)$ est un polynôme de l'endomorphisme u .

De même, si $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in K[X]$ et si $A \in M_n(K)$, alors

on définit le polynôme en A $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_N A^N$

5.3 Propriétés

Proposition. Soit $P \in K[X]$ et $u \in L(E)$ alors $Ker(P(u))$ et $Im(P(u))$ sont stables par u

preuve :

Exercice. Montrer que si $u, v \in L(E)$ avec $u \circ v = v \circ u$ et si $P \in K[X]$ alors $P(u)$ et v commutent et $ker(P(u))$ et $Im(P(u))$ sont stables par v .

Lemme. Si E est de dimension finie et si B est une base de E alors $Mat_B(P(u)) = P(Mat_B(u))$

preuve :

5.4 Autres propriétés

Théorème . Soit $u \in L(E)$, $(P, Q) \in K[X]^2$ et $\lambda \in K$ alors

$$\begin{cases} (P+Q)(u) = P(u) + Q(u) \\ (\lambda P)(u) = \lambda P(u) \\ 1_{K[X]}(u) = Id_E \\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) \\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) \end{cases}$$

Remarque. On peut appliquer ce résultat en remplaçant u par une matrice A .

preuve :

5.5 Polynômes annulateurs

5.5.1 Définition

Définition. Soit E un K espace vectoriel et $u \in L(E)$ et $P \in K[X]$.

On dit que le polynôme P est un *polynôme annulateur de u* si $P(u) = 0_{L(E)}$

Définition. Soit $A \in M_n(K)$ et $P \in K[X]$.

On dit que le polynôme P est un *polynôme annulateur de A* si $P(A) = 0_{M_n(K)}$

Exemple. Si $f \in L(E)$ est une symétrie alors un polynôme annulateur de f est : $X^2 - 1$

Si $f \in L(E)$ est un projecteur alors un polynôme annulateur de f est : $X^2 - X$

5.5.2 Applications : calcul de l'inverse ou des des puissances de A au moyen d'un polynôme annulateur

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, alors $X^2 - 5X + 6$ est un polynôme annulateur de A , etc, $A^n = \dots$

6 Compléments : interpolation de Lagrange

6.1 Interpolation

6.1.1 Cadre du problème

On considère $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in K^{n+1}$ $n+1$ points distincts de K et $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in K^{n+1}$ $n+1$ valeurs quelconques.

On cherche un polynôme $P \in K_n[X]$ vérifiant : $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(x_i) = y_i$

Définition. On dit qu'un tel polynôme, est un *polynôme interpolateur*.

6.1.2 Interprétation graphique

6.1.3 Mise en équation

Si on cherche P sous la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ alors le problème s'écrit :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket , \sum_{k=0}^n a_k x_i^k = y_i \Leftrightarrow V(x_0, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Avec $V(x_0, \dots, x_n)$ la matrice de Vandermonde, dont on sait que le déterminant est non nuls puisque les x_i sont distincts.

6.1.4 Théorème

Théorème . Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ $n+1$ points distincts de K et $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in K^{n+1}$ $n+1$ valeurs quelconques, alors il existe un *unique polynôme* $P \in K_n[X]$ vérifiant : $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(x_i) = y_i$.

preuve :

6.2 Base des polynômes interpolateurs de Lagrange

6.2.1 Définition

Définition. Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ $n+1$ points distincts de K .

Alors, on pose : $\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $L_j = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (X - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i)}$

Les polynômes L_j sont appelés *polynômes interpolateurs de Lagrange*.

6.2.2 Propriétés

Propriété. Les L_j sont des polynômes de $K_n[X]$ de degré n et $\forall (i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$, $L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

preuve :

6.3 Coordonnées dans la base de Lagrange

Théorème . La famille $(L_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une base de $K_n[X]$ et $\forall P \in K_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$

Corollaire. L'unique polynôme de $K_n[X]$ vérifiant $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(x_i) = y_i$ est le polynôme : $P = \sum_{i=0}^n y_i L_i$

preuve :

6.4 Propriétés

Proposition. $\sum_{i=0}^n L_i = 1$

preuve :

6.5 Exemple

Considérons les trois points : $(0, 1)$, $(2, 5)$ et $(4, 17)$.

$L_0(X) = \frac{(X-2)(X-4)}{8}$, $L_1(X) = \frac{-X(X-4)}{4}$ et $L_2(X) = \frac{X(X-2)}{8}$.

$$PIL(X) = 1L_0 + 5L_2 + 17L_2 = 1 + X^2$$

Sommaire

1	Produit d'espaces vectoriels	1
1.1	Espace vectoriel produit	1
1.2	Dimension	1
2	Somme de sous espaces vectoriels	1
2.1	Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels	1
2.2	Somme directe	2
2.2.1	Cas général	2
2.2.2	Cas particulier de deux sous espaces vectoriels	2
2.2.3	Exemple	2
2.3	Base adaptée à une somme directe	2
2.4	Partition d'une base	2
2.5	Dimension d'une somme	3
3	Matrices par blocs	3
3.1	Présentation	3
3.2	Opérations par blocs	3
3.2.1	Combinaison linéaire et transposition	3
3.2.2	Produit	3
3.2.3	Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs	3
3.3	Projections et symétries	3
3.3.1	Définitions	3
3.3.2	Projecteurs	4
3.3.3	Symétries	4
3.4	Sous espace vectoriel stable	4
3.4.1	Définition	4
3.4.2	Un exemple	4
3.4.3	Interprétation matricielle	4
3.5	Matrices diagonales par blocs	5
3.5.1	Cas général	5
3.5.2	Réciproquement	5
3.5.3	Cas particulier d'une matrice triangulaire	5
4	Trace	5
4.1	Trace d'une matrice	5
4.2	Propriétés	5
4.3	Corollaires	5
4.4	Trace d'un endomorphisme	6
4.4.1	Définition	6
4.4.2	Propriétés	6
4.4.3	Exemple	6
5	Polynômes de matrices et d'endomorphismes	6
5.1	Puissances d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée	6
5.2	Polynômes d'un endomorphisme	6
5.3	Propriétés	6
5.4	Autres propriétés	7
5.5	Polynômes annulateurs	7
5.5.1	Définition	7
5.5.2	Applications : calcul de l'inverse ou des des puissances de A au moyen d'un polynôme annulateur	7
6	Compléments : interpolation de Lagrange	7
6.1	Interpolation	7
6.1.1	Cadre du problème	7
6.1.2	Interprétation graphique	7
6.1.3	Mise en équation	7
6.1.4	Théorème	7
6.2	Base des polynômes interpolateurs de Lagrange	8
6.2.1	Définition	8
6.2.2	Propriétés	8
6.3	Coordonnées dans la base de Lagrange	8
6.4	Propriétés	8
6.5	Exemple	8