

Chapitre 2 : Séries numériques

Dans ce chapitre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

1 Séries

1.1 Généralités

Définitions. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de K . Alors, on pose : $\forall n \geq n_0 \quad S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$.

La nouvelle suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ ainsi obtenue est appelée **série numérique de terme général u_n** . S_n est appelée **somme partielle de cette série**.

Remarques. Une série peut être vue comme une suite mais cette suite est définie de manière particulière, par son terme général. On essaiera d'obtenir des informations sur la série à partir de son terme général.

Une suite est une série particulière.

Remarque : "une suite est une série".

preuve:

1.2 Convergence, somme

Définitions. On dit qu'une série de terme général u_n est convergente si et seulement si $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^N u_n$ existe et est finie dans K .

Une série qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Deux séries toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes sont dites de même nature.

Si la série est convergente alors on pose $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^N u_n$. Cette valeur est appelée **somme de la série**.

On pose aussi $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=n_0}^N u_n$, R_N qui est appelé **reste d'ordre N de la série**.

1.3 Exemples

1.3.1 Exemple 1

Série de terme général $u_n = (-1)^n$

1.3.2 Exemple 2

Série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$

1.3.3 Exemple 3

Série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1.4 Importance des premiers termes, notations

Théorème . Soit une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $n_1 \geq n_0$.

Alors les séries associées aux suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(u_n)_{n \geq n_1}$ sont de même nature.

Remarque. Autrement dit les premiers termes n'influencent pas sur la nature de la série. Par contre, ATTENTION, ils ont une influence sur la somme.

Notations : On notera $\sum u_n$ la série de terme général u_n .

preuve :

1.5 Comportement asymptotique du terme général

1.5.1 Théorème

Théorème . Soit une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de K . Alors : $\sum u_n$ convergente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

preuve :

Définition. Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 et qui est donc divergente est dite grossièrement divergente.

1.5.2 Contre exemple

Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, cette série est appelée série harmonique. Alors cette série est divergente bien que son terme général tende vers 0.

preuve :

1.6 Retour sur le lien suite-série

Théorème . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K . Alors : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente $\Leftrightarrow$ la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente

preuve :

1.7 Linéarité de la somme

Théorème . On considère deux suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ et les séries associées. Soit $\lambda \in K$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum u_n \text{ divergente et } \sum v_n \text{ convergente} &\Rightarrow \sum (u_n + \lambda v_n) \text{ divergente} \\ \sum u_n \text{ convergente et } \sum v_n \text{ convergente} &\Rightarrow \sum (u_n + \lambda v_n) \text{ convergente} \end{aligned}$$

De plus dans le dernier cas on a alors : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$

Remarque. Si les deux séries sont divergentes on ne peut rien conclure dans le cas général

preuve :

Corollaire. L'ensemble des séries convergente est un K espace vectoriel.

Corollaire. (Séries à valeurs complexes)

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ alors

$\sum u_n$ convergente si et seulement si $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ sont convergentes

De plus, si il y a convergence alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n)$

preuves :

2 Séries de références

2.1 Séries géométrique

2.1.1 Définition

Définition. On appelle série géométrique toute série dont le terme général est celui d'une suite géométrique.

2.1.2 Théorème

Théorème . Si $r \in \mathbb{C}$ alors : la série de terme général r^n est convergente $\Leftrightarrow |r| < 1$

De plus , si $|r| < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

Remarque. Par contraposition : la série de terme général r^n est divergente $\Leftrightarrow |r| \geq 1$

2.1.3 preuve

2.2 Séries de Riemann

2.2.1 Définition

Définition. On appelle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

2.2.2 Théorème

Théorème . Si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Remarques. Par contraposition : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$
Le cas limite est pour $\alpha = 1$ et correspond à la série harmonique qui diverge.

2.2.3 preuve

3 Séries à termes positifs

3.1 Lemme préliminaire

Lemme. Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est *majorée*.

Remarque. Convention, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de termes positifs divergente, alors on pose $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$

preuve :

3.2 Règle de comparaison

Théorème . Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites à termes positifs. On suppose que : $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $0 \leq u_n \leq v_n$

Alors : $\sum v_n$ est convergente $\Rightarrow \sum u_n$ est convergente

De plus, si les séries convergent alors : $\sum_{n=n_N}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$.

Remarque. Par contraposition : $\sum u_n$ divergente $\Rightarrow \sum v_n$ divergente

preuve :

Exemple. $\sum \frac{2+\sin(n)}{n^2}$

3.3 Règle de l'équivalent

Théorème . Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites à termes positifs telles que : $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

preuve :

Exemple. $\sum \exp(\frac{1}{n})(\ln(1 + \frac{1}{n}) - \operatorname{sh}(\frac{1}{n}))$

4 Absolue convergence

4.1 Définition

Définition. On dit qu'une série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\sum |u_n|$ est convergente.

Remarque. On peut noter $\sum |u_n| < +\infty$ si $\sum |u_n|$ est convergente.

4.2 Théorème

4.2.1 Enoncé

Théorème . Soit $\sum u_n$ une série de nombres réels ou complexes. Alors :

$$\sum u_n \text{ absolument convergente} \Rightarrow \sum u_n \text{ convergente}$$

Remarques. Attention la réciproque est fausse, comme nous le verrons en exemple.

Si la série est convergente sans être absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente (terme hors programme).

4.3 Exemples

4.3.1 Exemple 1

Série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

4.3.2 Exemple 2 : série harmonique alternée

Série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

preuve de la convergence et calcul de la somme.

4.4 Utilisation des dominées et des négligeables

Théorème . Soit $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$ et $(a_n) \in [0; +\infty[{\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O_{+\infty}(a_n)$, alors :

$$\sum a_n \text{ convergente} \Rightarrow \sum u_n \text{ absolument convergente} \Rightarrow \sum u_n \text{ convergente}$$

Remarques. Attention, il faut les a_n positifs

On a le même théorème avec $u_n = o_{+\infty}(a_n)$

preuve :

Exemple. $\sum e^{-\sqrt{n}}$

4.5 Comparaison à une série géométrique : Règle de D'Alembert

4.5.1 Théorème

Théorème . Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de K^* .

Alors si $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ on a : $\lambda < 1 \Rightarrow \sum u_n$ est convergente
 $\lambda > 1 \Rightarrow \sum u_n$ est divergente

Remarques. Si $\lambda = 1$ alors on ne peut rien dire.

La limite n'existe pas à priori.

Par convention $1 < +\infty$

preuve :

4.5.2 Exemples

Exemple 1

$$\sum u_n \text{ avec } u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Exemple 2

$$\sum u_n \text{ avec } u_n = \frac{1}{n}$$

Exemple 3

$$\sum u_n \text{ avec } u_n = \frac{1}{5^n} \binom{2n}{n}$$

5 Séries alternées

5.1 Définition

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. Alors on dit que la série $\sum u_n$ est **alternée** si et seulement si $\left[\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n |u_n| \right]$ ou $\left[\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^{n+1} |u_n| \right]$.

Remarque. En fait, c'est le signe de u_n qui est alterné.

5.2 Etude

Dans cette section on étudie la série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ avec $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de limite nulle.

5.3 Théorème spécial

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la série } \sum u_n \text{ est alternée} \\ (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \end{array} \right.$$

alors la série $\sum u_n$ est **convergente**

De plus, en posant $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ on a :

- les suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes
- S est du même signe que u_0 et $|S| \leq |u_0|$
- On a un encadrement simple du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, |S - S_n| \leq |u_{n+1}|$.
- $S - S_n$ est du même signe que u_{n+1} .
- La somme de la série est comprise entre deux termes consécutifs de $(S_n)_{n \geq 0}$

5.4 Exemple

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$$

5.5 Ordre des termes

Théorème . Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $\sum u_n$ est une série absolument convergente alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ ne dépend pas de l'ordre des termes. On peut alors noter } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

preuve : HP

Remarque. Si la série est convergente sans être absolument convergente alors l'ordre des termes peut changer la somme !!

$$\text{Exemple : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$$

$$\text{et } (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}) + \dots = \frac{1}{2} \ln(2)$$

6 Produit de Cauchy

6.1 Définition

Définition. Soit deux séries numériques $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, alors on appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série de terme générale w_n avec $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$

Remarque. $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$

Interprétation : avec le produit de deux polynômes ...

6.2 Théorème

Théorème . Soit deux séries numériques absolument convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$

Remarque. Il faut de la convergence absolue, sinon ça ne marche pas :

Contre exemple : $(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) \dots$

preuve : non exigible

6.3 Application : exponentielle complexe

Théorème . $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est convergente.

Définition. On pose : $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

L'application $\exp$ ainsi définie est appelée *exponentielle complexe*

Théorème . On a : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$

Remarque. Si $z \in \mathbb{R}$ on retrouve l'exp réelle et on retrouve l'exp vu en première année

preuve :

7 Complément : Formule de Stirling

7.1 Théorème

Théorème . $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$

7.2 preuve(non exigible)

On pose $a_n = \frac{\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n}{n!}$, on montre que $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = O(\frac{1}{n^2})$

On utilise Wallis : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \dots$

Sommaire

1	Séries	1
1.1	Généralités	1
1.2	Convergence, somme	1
1.3	Exemples	1
1.3.1	Exemple 1	1
1.3.2	Exemple 2	1
1.3.3	Exemple 3	1
1.4	Importance des premiers termes, notations	1
1.5	Comportement asymptotique du terme général	2
1.5.1	Théorème	2
1.5.2	Contre exemple	2
1.6	Retour sur le lien suite-série	2
1.7	Linéarité de la somme	2
2	Séries de références	3
2.1	Séries géométrique	3
2.1.1	Définition	3
2.1.2	Théorème	3
2.1.3	preuve	3
2.2	Séries de Riemann	3
2.2.1	Définition	3
2.2.2	Théorème	3
2.2.3	preuve	3
3	Séries à termes positifs	4
3.1	Lemme préliminaire	4
3.2	Règle de comparaison	4
3.3	Règle de l'équivalent	4
4	Absolue convergence	5
4.1	Définition	5
4.2	Théorème	5
4.2.1	Enoncé	5
4.3	Exemples	5
4.3.1	Exemple 1	5
4.3.2	Exemple 2 : série harmonique alternée	5
4.4	Utilisation des dominées et des négligeables	5
4.5	Comparaison à une série géométrique : Règle de D'Alembert	5
4.5.1	Théorème	5
4.5.2	Exemples	6
5	Séries alternées	7
5.1	Définition	7
5.2	Etude	7
5.3	Théorème spécial	7
5.4	Exemple	7
5.5	Ordre des termes	7
6	Produit de Cauchy	8
6.1	Définition	8
6.2	Théorème	8
6.3	Application : exponentielle complexe	8
7	Complément : Formule de Stirling	8
7.1	Théorème	8
7.2	preuve(non exigible)	8

preuve du 1.5.1. : comportement du terme général

Si $\sum u_n$ est convergente alors : $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \in \mathbb{R}$

Donc $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda - \lambda = 0$

preuve du 3.2. : règle de comparaison

On pose $S_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ et $T_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$

En sommant les $u_k \leq v_k$ on obtient : $0 \leq S_n \leq T_n$

Alors : $\sum v_n$ est convergente

$\Rightarrow (T_n)$ est convergente

$\Rightarrow (S_n)$ est convergente puisque (S_n) est croissante (car les u_n sont positifs)

$\Rightarrow \sum u_n$ est convergente

preuve du 3.3. : règle de l'équivalent

Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc $\exists N, n \geq N \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 2$

Et comme $v_n > 0$ alors : $0 \leq \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq 2v_n$

Ensuite on applique la règle de comparaison.

preuve du 4.2.1 : théorème de l'absolue convergence

Etape 1 : On suppose que (u_n) est une suite réelle telle que $\sum |u_n|$ est convergente et on montre que $\sum u_n$ est convergente.

On pose : $\begin{cases} u_n^+ = \text{Max}(u_n, 0) \\ u_n^- = \text{Max}(-u_n, 0) \end{cases}$

On a ainsi : $\begin{cases} 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \\ 0 \leq u_n^- \leq |u_n| \\ u_n = u_n^+ - u_n^- \end{cases}$

Ensuite, par règle de comparaison pour les séries à termes positifs : $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes, puis $\sum u_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.

Etape 2 : On suppose maintenant que (u_n) est une suite complexe telle que $\sum |u_n|$ est convergente et on montre que $\sum u_n$ est convergente.

On remarque alors que : $\begin{cases} |\text{Re}(u_n)| \leq |u_n| \\ |\text{Im}(u_n)| \leq |u_n| \end{cases}$

En appliquant le résultat de l'étape 1 on a : $\sum \text{Re}(u_n)$ et $\sum \text{Im}(u_n)$ convergentes.

Comme $u_n = \Re(u_n) + i\text{Im}(u_n)$ on en déduit que $\sum u_n$ est convergente.

preuve du 5.3 : théorème spécial

Notations

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant : $\begin{cases} \text{la série } \sum u_n \text{ est alternée} \\ (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \end{cases}$

Posons : $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Démonstration

- Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} A_n = S_{2n} \\ B_n = S_{2n+1} \end{cases}$

Posons $a_n = |u_n|$, on a alors, par hypothèse : (a_n) décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

- Alors : $A_{n+1} - A_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} u_k - \sum_{k=0}^{2n} u_k = u_{2n+2} + u_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ car (a_n) est décroissante.

On en déduit (A_n) décroissante.

- De même $B_{n+1} - B_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+3} - a_{2n+2} \geq 0$ car (a_n) est décroissante.

On en déduit (B_n) croissante.

- $A_n - B_n = S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- On a donc $\begin{cases} (A_n) \text{ décroissante} \\ (B_n) \text{ croissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n - B_n) = 0 \end{cases}$

Les suites (A_n) et (B_n) sont donc adjacentes et on en déduit : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \lambda = S$

Ou encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \lambda$

ce qui permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lambda$ et donc que : $\boxed{\sum S_n \text{ est convergente.}}$

- Comme (A_n) est décroissante et (B_n) est décroissante alors : $B_n \leq \lambda \leq A_n \Rightarrow S_{2n+1} \leq \lambda \leq S_{2n}$ mais aussi $B_n \leq \lambda \leq A_{n+1} \Rightarrow S_{2n+1} \leq \lambda \leq S_{2n+2}$

On a donc : les suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et S est compris entre deux termes consécutifs de (S_n)

- De la même manière $S_0 \leq S \leq S_1 \Rightarrow u_0 \leq S \leq u_0 + u_1$

Donc si $u_0 \geq 0$ alors $S \geq 0$ et donc S est du signe de u_0

Si $u_0 < 0$ alors $u_0 \leq S \leq u_0 + u_1 \Rightarrow S \leq -a_0 + a_1 \leq 0$ car (a_n) décroissante et donc S est du signe de u_0

On en déduit : S est du même signe que u_0 et $|S| \leq |u_0|$

- On a un encadrement simple du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, |S - S_n| \leq |u_{n+1}|$.

- $S - S_n$ est du même signe que u_{n+1} .

- La somme de la série est comprise entre deux termes consécutifs de $(S_n)_{n \geq 0}$

preuve du 6.2 : théorème sur le produit de Cauchy

- Posons : $C_n = \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$, $T_n = \{(i, j) \in C_n, i + j \leq n\}$

- Supposons dans un premier temps que les termes sont tous positifs (les u_k, v_k et donc w_n)

Alors :

$$T_n \subset C_n \subset T_{2n}$$

$$\Rightarrow \sum_{(i,j) \in T_n} u_i v_j \leq \sum_{(i,j) \in C_n} u_i v_j \leq \sum_{(i,j) \in T_{2n}} u_i v_j$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n w_k \leq \left(\sum_{i=0}^n u_i \right) \left(\sum_{j=0}^n v_j \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} w_k$$

Puisque $\sum u_i$ et $\sum v_i$ sont convergente alors : $\sum_{k=0}^n w_k \leq \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j \right) < +\infty$

et donc $\sum w_k$ est convergente.

En passant à la limite dans : $\sum_{k=0}^n w_k \leq \left(\sum_{i=0}^n u_i \right) \left(\sum_{j=0}^n v_j \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} w_k$

on obtient : $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k \leq \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j \right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} w_k$

et donc : $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j \right)$