Mathématiques : contrôle des connaissances n°4

NOM, PRENOM :

1°) Enoncer proprement le théorème du rang.

Théorème : Soit E un K espace vectoriel de dimension **finie** et F un K espace vectoriel. Soit $f \in L(E,F)$.

Alors : $dim(E) = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$

Remarques : F, contrairement à E, n'est pas forcement de dimension finie.
Le résultat est vraie pour un endomorphisme mais ce n'est pas le cas le plus général.

2°) Donner la définition et la valeur du déterminant de Vandermonde.

Définition : Soit $n \geq 2$ et $(a_1, ..., a_n) \in K^n$. Alors on appelle déterminant de Vandermonde le déterminant de la matrice de $M_n(K)$ suivante : $V(a_1, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Théorème : $V(a_1, ..., a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

Remarques : attention à ce que la matrice soit carrée (même nombre de lignes que de colonnes)
il faut bien $i < j$ et non pas $i \leq j$

3°) Donner la définition d'un Hyperplan.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Alors H un sous espace vectoriel de E est un hyperplan de E si et seulement si $dim(H) = dim(E) - 1$

Autre définition : un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire **NON NULLE**

4°) On pose : $\begin{array}{ccccc} f & : &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \frac{sin(ln(1+t))-t}{\sqrt{t}\left(e^{t^2}-1\right)} \end{array}$

a) Donner un équivalent de f au voisinage de $t = 0$.

$sin(ln(1+t)) - t = sin(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)) - t = (t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)) - t = -\frac{t^2}{2} + o(t^2) \sim -\frac{t^2}{2}$

$e^{t^2} - 1 = 1 + t^2 + o(t^2) - 1 = t^2 + o(t^2) \sim t^2$

Comme on peut multiplier et diviser des équivalents : $f(t) \sim \frac{-\frac{t^2}{2}}{\sqrt{t}t^2} = \frac{-1}{2\sqrt{t}}$

On a donc : $\boxed{f(t) \sim \frac{-1}{2\sqrt{t}}}$

b) f est-elle intégrable sur $]0,1]$?

f est continue par morceaux sur $]0,1]$. L'intégrabilité de f pose donc problème en 0

D'après le cours $t \mapsto \frac{-1}{2\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc, par équivalent f est intégrable sur $]0,1]$, donc, par équivalent : $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,1]}$

5°) Donner la formule de changement de bases pour un endomorphisme en dimension finie.

6°) Soit $a \in \mathbb{R}$ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$ Calculer $det(A)$ et $tr(A)$

• La trace est la somme des termes diagonaux donc : $tr(A) = 1 + a^2 + a^2 = 1 + 2a^2$

• Par la formule de Sarrus :
$det(A) = a^4 + a^2 + a^2 - a^4 - a^4 - 1 = -(a^4 - 2a^2 + 1) = -(a^2 - 1)^2 = -(a+1)^2(a-1)^2$

Bilan : $\boxed{tr(A) = 1 + 3a^2 \text{ et } det(A) = -(a+1)^2(a-1)^2}$