Chapitre 7 : Espaces préhilbertiens réels ; Espaces euclidiens

Chapitre de révisions qui fait partie du programme de première et de deuxième année. Dans ce chapitre E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension quelconque (y compris infinie et sauf mention contraire).

1 Produit scalaire

1.1 Produit scalaire

Définitions. *On dit qu'une application $<,>$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E si et seulement si $\forall (x,y,z) \in E^3$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:*

1. $< x, y+\lambda z >=< x,y > +\lambda < x,z >$
2. $< x,y >=< y,x >$
3. $< x,x > \geq 0$
4. $< x,x >= 0 \Rightarrow x = 0_E$

Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<,>$ alors on dit que $(E,<,>)$ est un espace préhilbertien réel.
Si de plus E est de dimension finie alors on dit que $(E,<,>)$ est un espace euclidien.

Remarques. *On dit que $<,>$ est une forme bilinéaire symétrique. (1 pour linéaire 2 pour symétrique, 1 et 2 pour bilinéaire symétrique,4 pour définie, 3 pour positive)*
Sur un espace vectoriel il peut exister plusieurs produits scalaires.
On note parfois $x.y$ ou (x,y) ou $(x|y)$ le produit scalaire ...

1.2 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

On note $E = \mathbb{R}^n$ identifié à $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
On pose : $\forall (X,Y) \in E^2$, $< X,Y >= X^T Y$
Alors : $<,>$ définie sur E un produit scalaire appelé produit scalaire canonique.

preuve :

1.3 Produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$

On note $E = M_n(\mathbb{R})$ et on pose : $\forall (A,B) \in E^2$, $< A,B >= tr(A^T B)$
Alors : $<,>$ définit sur E un produit scalaire appelé produit scalaire canonique.

preuve :

1.4 Un produit scalaire sur $C^0([a,b])$

Soit $E = C^0([a;b])$. On pose : $\forall (f,g) \in E^2$, $< f,g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$
Alors $<,>$ définit un produit scalaire sur E.

Remarque. *Par restriction on peut en déduire un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$*

preuve :

2 Norme euclidienne

2.1 Définition

Si $<,>$ est un produit scalaire sur E alors on pose : $\forall x \in E\ ,\ ||x|| = \sqrt{<x,x>}$
On dit que $||.||$ est la **norme euclidienne** associée au produit scalaire $<,>$.

Remarques. *On gardera ces notations pour la suite du chapitre.*
Même dans un espace préhilbertien on parle de norme euclidienne.
Attention il y a des normes qui ne sont pas euclidienne, on précisera tout cela dans un prochain chapitre.
On garde ces notations pour la suite.

2.2 Première propriétés

$$\forall x \in E\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \begin{cases} ||x|| \geq 0 \\ ||\lambda x|| = |\lambda|\,||x|| \\ \forall x \in E\ ,\ ||x|| = 0 \Rightarrow x = 0_E \end{cases}$$

preuve :

2.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

2.3.1 Théorème

$\forall x \in E\ ,\ \forall y \in E\ ,\ |<x,y>| \leq ||x||\,.\,||y||$

2.3.2 preuve

2.3.3 Cas d'égalité

Lemme. $\forall x \in E\ ,\ \forall y \in E\ ,\ |<x,y>| = ||x||\,.\,||y|| \Leftrightarrow (x,y)$ *est liée*

2.4 Inégalité Triangulaire

2.4.1 Théorème

$\forall x \in E\ ,\ \forall y \in E\ ,\ ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

2.4.2 preuve

2.4.3 Cas d'égalité

Lemme. $\forall x \in E\ ,\ \forall y \in E\ ,\ ||x+y|| = ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow (x,y)$ *est positivement liée*

2.5 Quelques identités

2.5.1 Identité du parallélogramme

Lemme. $\forall (x,y) \in E^2\ ,\ ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$

Interprétation
preuve :

2.5.2 Identités de polarisation

Théorème . *Soit* $(E,<,>)$ *un espace préhilbertien. Alors :* $\forall (x,y) \in E^2$
$i) < x,y >= \frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2)$
$ii) < x,y >= \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2 - ||x-y||^2)$
$iii) < x,y >= \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$

preuve :

3 Orthogonalité

3.1 Vocabulaire

Définitions. *Soit x et y deux vecteurs de E. Alors on dit que :*
x est unitaire si et seulement si $||x|| = 1$
x et y sont orthogonaux si et seulement si $< x, y >= 0$ On note ceci $x \perp y$

3.2 Famille orthogonale

3.2.1 Définitions

Définitions. *Soit $S = (x_1, x_2, .., x_n)$ une famille de E. Alors on dit que :*
S est orthogonale si et seulement si $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\forall j \in [\![1; n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow < x_i, x_j >= 0$
S est orthonormale (ou orthonormée) si et seulement si S est une famille orthogonale de vecteurs unitaires

3.2.2 Théorème

Théorème . *Une famille orthogonale de vecteurs* **non nuls** *est libre.*

Corollaire. *Une famille orthonormale est libre.*

preuve :

3.3 Théorème de Pythagore

3.3.1 Théorème de Pythagore

Théorème . *Soit x et y deux vecteurs de E. Alors : $x \perp y \Leftrightarrow ||x||^2 + ||y||^2 = ||x + y||^2$*

preuve :

3.3.2 Avec plus de vecteurs

Lemme. *Soit $n \geq 3$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille orthogonale de E. Alors :*
$||x_1 + x_2 + .. + x_n||^2 = ||x_1||^2 + ||x_2||^2 + .. + ||x_n||^2$

Remarques. *Attention il n'y a pas de réciproque avec n vecteurs.*
Contre-exemple : $x_1 = (1, 2)$, $x_2 = (0, 2)$ et $x_3 = (0, -1)$

3.4 Orthogonal d'une partie ou d'un sous espace vectoriel

3.4.1 Définition

Définition. *Soit X une partie de E alors on pose : $X^\perp = \{x \in E \ , \ \forall y \in X \ \ < x, y >= 0\}$*

Remarques. *Cette définition s'applique en particulier à un sous espace vectoriel de E.*
On a en fait $X^\perp = Vect(X)^\perp$

3.4.2 Propriétés

Propriété. *$X^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.*

Propriétés. *Si F est un sous espace vectoriel de E alors :*
i) $\{0_E\}^\perp = E$ *ii)* $E^\perp = \{0_E\}$ *iii)* $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ *iv)* $F \subset (F^\perp)^\perp$

Remarque. *Le point iii) est faux si F n'est pas un s.e.v.*

preuves :

4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

4.1 Théorème

Théorème . *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on a :*
si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille libre de E alors il existe une famille orthonormale de vecteurs non nuls $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de E telle que : $\forall k \in [\![1..n]\!]$, $Vect(u_1, ..., u_k) = Vect(e_1, ..., e_k)$

Remarques. *On a le même théorème avec "orthogonale"*
En particulier : $Vect(u_1, ..., u_n) = Vect(e_1, ..., e_n)$ et $(u_1, ..., u_n)$ est une base orthonormale de $Vect(e_1, ..., e_n)$

4.2 preuve

4.3 Algorithme de Schmidt

La famille $(u_1, .., u_n)$ se construit par itérations en posant : $\begin{cases} u_1 = \frac{e_1}{||e_1||} \\ \forall k \geq 2 , \quad u_k = \frac{e_k - \sum_{p=1}^{k-1} < e_k, u_p > u_p}{\left|\left| e_k - \sum_{p=1}^{k-1} < e_k, u_p > u_p \right|\right|} \end{cases}$

Remarques. $\sum_{p=1}^{k-1} < e_k, u_p > u_p$ *est le projeté orthogonale de e_k sur $Vect(u_1, ..., u_{k-1})$ (cf 5.)*
On dit que l'on applique l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.

4.4 Application aux espaces euclidiens

Théorème . *Tout espace euclidien admet une base orthonormée.*

Remarque. *De la même manière, tout sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien admet une base orthonormale.*

Théorème . *(Théorème de la base orthonormée incomplète)*
Si $(e_1, ..., e_k)$ est une famille orthonormale de vecteurs non nuls alors il existe $(e_{k+1}, .., e_{dim(E)}) \in E^{dim(E)-k}$ telle que $(e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_{dim(E)})$ soit une base orthonormale de E.

4.5 Calculs dans une base orthonormée d'un espace euclidien

Théorème . *Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orhonormée de E. Alors :*
Tout vecteur x de E peut s'écrire dans B sous la forme : $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ avec $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Les coordonnées de x dans B sont donc $Mat_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Soit $(x, y) \in E^2$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de x dans B et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de y dans B.

Alors : $< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X^T Y$ et $||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{X^T X}$

Remarque. *On retrouve, à un changement de base près, le produit scalaire canonique.*

preuve :

5 Théorème de projection orthogonale

5.1 Théorème

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors :

i) $E = F \oplus F^{\perp}$

ii) On peut définir p_F le projecteur orthogonal sur F par :

$\forall x \in E$ alors $p_F(x) = y$ où y est l'unique vecteur tel que $\begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}$

iii) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de F alors : $\forall x \in E\ ,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i$

iv) Pour tout x de E le vecteur projeté $p_F(x)$ est la meilleure approximation de x dans F, c'est-à-dire que : $d(x, F) = \min_{y \in F} ||x - y|| = ||x - p_F(x)||$

De plus $P_F(x)$ est le seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = ||x - y||$

Remarques. *p_F est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.*

Si $(e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base quelconque (pas forcément orthonormée) de E alors $p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k$ avec $(x'_1, \ldots, x'_n)$ solution du système : $\forall i \in [\![1; n]\!]\ ,\ < x - p_F(x), e'_i >= 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x'_k < e'_k, e'_i >=< x, e'_i >$

preuve :

5.2 Supplémentaire orthogonale

5.2.1 Définition

Définition. *Soit F et G deux sous espaces vectoriels de $(E, <,>)$.*
Alors, on dit que F et G sont orthogonaux si et seulement si $\forall (f, g) \in F \times G\ ,\ < f, g >= 0$
On note ceci $F \perp G$.

5.2.2 Supplémentaire orthogonaux

Si F et G sont orthogonaux alors $F + G = F \oplus G$, si de plus $F \oplus G = E$ alors on dit que :
F et G sont supplémentaire orthogonaux.
On note ceci $E = F \oplus^{\perp} G$.

5.2.3 Cas particulier

Lemme. *Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie de E alors: $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$*

Remarque. *C'est un corollaire du théorème de projection orthogonale.*

Corollaire. *Si F est un sous espace vectoriel d'un espace euclidien E alors :*
$dim(F^{\perp}) + dim(F) = dim(E)$ et $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$

5.2.4 Cas général

Si F n'est pas de dimension finie, on a seulement $F \oplus F^{\perp} \subset E$ et il n'y a pas forcément égalité.

Exemple. *Dans $E = C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire vu en 1.4. $(\mathbb{R}[X])^{\perp} = \{0_E\}$ ...*

5.3 Hyperplan

5.3.1 Représentation d'une forme linéaire

Théorème . *Soit ϕ une forme linéaire d'un espace* **euclidien** $(E, <, >)$. *Alors :*
il existe un unique $u \in E$ tel que $\forall x \in E$, $\phi(x) =< u, x >$

preuve :

5.3.2 Caractérisation des hyperplans d'un espace euclidien

Lemme. *Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien. Alors :*
tout hyperplan H de E s'écrit sous la forme $H = \{u\}^{\perp}$ avec $u \in E \backslash \{0_E\}$

preuve :

5.3.3 Vecteur normal à un hyperplan

Lemme. *Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et H un hyperplan de E. Alors :*
si $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est une équation cartésienne de H dans B, le vecteur a de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans B est un vecteur normal à H.

preuve :

5.3.4 Distance à un hyperplan

Théorème . *Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien, et u un vecteur non nul de E.*
On note H l'hyperplan : $H = \{u\}^{\perp}$

$$\text{Alors : } \forall x \in E \text{ , } \begin{cases} \text{le projeté orthogonal de } x \text{ sur } Vect(u) \text{ est } \frac{<x,u>}{||u||^2}u \\ \text{le projeté orthogonal de } x \text{ sur } H \text{ est } x - \frac{<x,u>}{||u||^2}u \\ d(x, H) = \frac{|<x,u>|}{||u||} \end{cases}$$

preuve :

5.3.5 Applications : distance à une droite dans $\mathbb{R}^2$ et distance à un plan dans $\mathbb{R}^3$

Sommaire

1 Produit scalaire **1**
- 1.1 Produit scalaire . . . 1
- 1.2 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ . . . 1
- 1.3 Produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$ . . . 1
- 1.4 Un produit scalaire sur $C^0([a,b])$ . . . 1

2 Norme euclidienne **2**
- 2.1 Définition . . . 2
- 2.2 Première propriétés . . . 2
- 2.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . 2
  - 2.3.1 Théorème . . . 2
  - 2.3.2 preuve . . . 2
  - 2.3.3 Cas d'égalité . . . 2
- 2.4 Inégalité Triangulaire . . . 2
  - 2.4.1 Théorème . . . 2
  - 2.4.2 preuve . . . 2
  - 2.4.3 Cas d'égalité . . . 2
- 2.5 Quelques identités . . . 2
  - 2.5.1 Identité du parallélogramme . . . 2
  - 2.5.2 Identités de polarisation . . . 2

3 Orthogonalité **3**
- 3.1 Vocabulaire . . . 3
- 3.2 Famille orthogonale . . . 3
  - 3.2.1 Définitions . . . 3
  - 3.2.2 Théorème . . . 3
- 3.3 Théorème de Pythagore . . . 3
  - 3.3.1 Théorème de Pythagore . . . 3
  - 3.3.2 Avec plus de vecteurs . . . 3
- 3.4 Orthogonal d'une partie ou d'un sous espace vectoriel . . . 3
  - 3.4.1 Définition . . . 3
  - 3.4.2 Propriétés . . . 3

4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt **4**
- 4.1 Théorème . . . 4
- 4.2 preuve . . . 4
- 4.3 Algorithme de Schmidt . . . 4
- 4.4 Application aux espaces euclidiens . . . 4
- 4.5 Calculs dans une base orthonormée d'un espace euclidien . . . 4

5 Théorème de projection orthogonale **5**
- 5.1 Théorème . . . 5
- 5.2 Supplémentaire orthogonale . . . 5
  - 5.2.1 Définition . . . 5
  - 5.2.2 Supplémentaire orthogonaux . . . 5
  - 5.2.3 Cas particulier . . . 5
  - 5.2.4 Cas général . . . 5
- 5.3 Hyperplan . . . 6
  - 5.3.1 Représentation d'une forme linéaire . . . 6
  - 5.3.2 Caractérisation des hyperplans d'un espace euclidien . . . 6
  - 5.3.3 Vecteur normal à un hyperplan . . . 6
  - 5.3.4 Distance à un hyperplan . . . 6
  - 5.3.5 Applications : distance à une droite dans $\mathbb{R}^2$ et distance à un plan dans $\mathbb{R}^3$ . . . 6