Chapitre 9 : Topologie d'un espace vectoriel normé, applications

Dans ce chapitre $(E, ||.||)$ désigne un K espace vectoriel normé de dimension quelconque avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

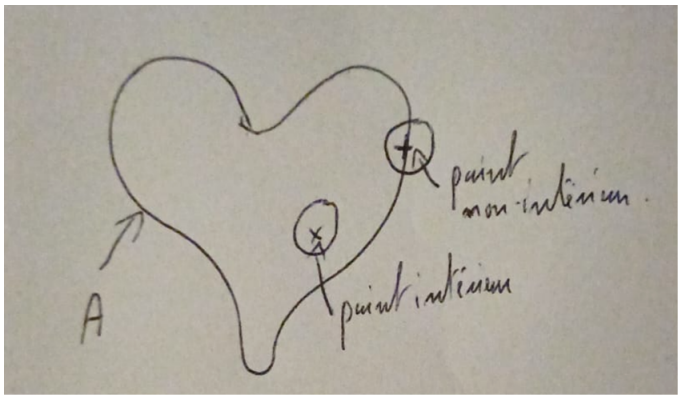
1 Topologie d'un espace vectoriel normé

1.1 Ouverts

1.1.1 Point intérieur

Définition. *Soit A une partie de E. Alors, on dit que : $a \in A$ est un* **point intérieur** *de A si et seulement si $\exists r > 0$, $\mathring{B}(a, r) \subset A$*

Schéma



Remarques. *On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A.*
$\mathring{A}$ est appelé intérieur de A
On a de manière immédiate $\mathring{A} \subset A$
On peut aussi définir la notion de point extérieur à A (point intérieur au complémentaire de A) mais la notion n'est pas au programme.

Exemple. *Si $A =]0, 1[\times[0, 1]$ alors $\mathring{A} =]0, 1[\times]0, 1[$*

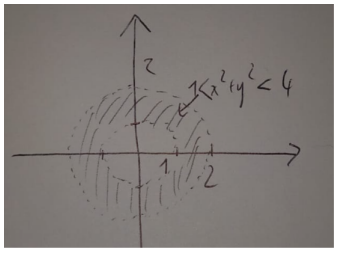
1.1.2 Ouvert

Définition. *Soit A une partie de E. Alors, on dit que :*
A est un **ouvert** *de E si et seulement si $\forall a \in A$, $\exists r > 0$, $\mathring{B}(a, r) \subset A$*

Remarques. *Autrement dit, A est un ouvert si et seulement si A est l'ensemble de ses points intérieurs.*
On a donc : A ouvert $\Leftrightarrow \mathring{A} = A$

1.1.3 Exemples

Exemples. *$\emptyset$ est un ouvert*
E est un ouvert
$]0, 1[$ est un ouvert
$]0; 1]$ n'est pas un ouvert
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $1 < x^2 + y^2 < 4\}$ est un ouvert



1.1.4 Propriétés

Proposition. *Une boule ouverte est un ouvert de E.*

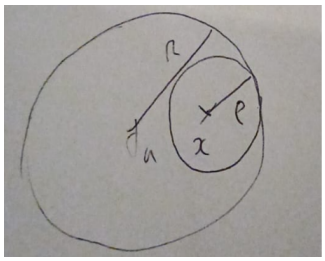
preuve : • Soit $a \in E$ et $r > 0$. On pose $A = \mathring{B}(a, r)$ et on veut montrer que A est un ouvert.

• Soit $x \in A$.
Posons $\rho = r - ||x - a||$. Comme $x \in A$ alors $||x - a|| < r$ et donc $\rho > 0$

• Soit $y \in \mathring{B}(x, \rho)$
$y - a = y - x + x - a$ et par inégalité triangulaire $||y - a|| \leq ||y - x|| + ||x - a||$
Mais $y \in \mathring{B}(x, \rho) \Rightarrow ||x - y|| < \rho$ donc $||y - a|| < \rho + ||x - a|| = r$ et donc $y \in A$
Ceci étant vrai $\forall y \in \mathring{B}(x, \rho)$ on a $\mathring{B}(x, \rho) \subset A$

• On a alors : $\forall x \in A$, $\exists \rho > 0$, $\mathring{B}(x, \rho) \subset A$, on a donc bien A ouvert.

Bilan : Une boule ouverte est ouverte.



Proposition. *Si $(A_n)_{1 \leq n \leq N}$ est une famille* **finie** *d'ouverts de E alors : $\bigcap_{n=1}^{N} A_n$ et $\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ sont des ouverts de E*

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille **infinie** *d'ouverts de E alors : $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est un ouvert de E*

Remarque. *Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas forcément un ouvert, par exemple $\bigcap_{n=1}^{+\infty}]\frac{-1}{n}; \frac{1}{n}[= \{0\}$ qui n'est pas un ouvert.*

preuve : Soit $(A_n)_{1 \leq n \leq N}$ une famille **finie** d'ouverts.

• Posons $A = \bigcap_{n=1}^{N} A_n$ et montrons que A est un ouvert.

Soit $a \in A$, alors : $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $a \in A_n$
et comme les A_n sont ouverts alors : $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $\exists r_n > 0$, $\mathring{B}(a, r_n) \subset A_n$

Posons $\rho = Min(\{r_i \ , \ i \in [\![1, N]\!]\})$

Soit $y \in \mathring{B}(a, \rho)$
Comme $\rho \leq r_n$ alors $\mathring{B}(a, \rho) \subset \mathring{B}(a, r_n) \subset A_n$ et donc $\mathring{B}(a, \rho) \subset \bigcap_{n=1}^{N} A_n = A$

On a : $\forall a \in A$, $\exists \rho > 0$, $\mathring{B}(a, \rho) \subset A$ donc $A = \bigcap_{n=1}^{N} A_n$ est un ouvert.

• Posons $B = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$

Soit $b \in B$ alors il existe $k \in [\![1, N]\!]$ tel que $b \in A_k$
Comme A_k est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que : $\mathring{B}(a, r) \subset A_k \subset B$
On a donc $B = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ qui est un ouvert.

• La démonstration ci-dessus est la même si l'union est infinie.

1.2 Fermés

1.2.1 Définition

Définition. *On dit que A une partie de E est une partie fermée de E*
si et seulement si son complémentaire dans E est ouvert.

1.2.2 Propriétés

Proposition. *Une boule fermée est un fermé de E. Une sphère est un fermé de E.*

preuve : (pour une boule fermée)
Soit $a \in E$ et $r > 0$. On note $A = \overline{B}(a, r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r
Montrons que A est fermé.
Pour cela on montre que $C = E \backslash A = \{x \in E \ , \ ||x - a|| > r\}$, le complémentaire de A est un ouvert.

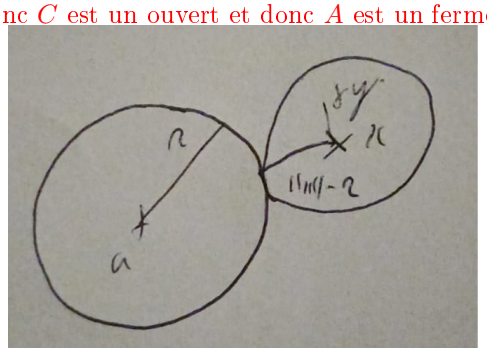
Soit $x \in C$ Posons $\rho = ||x - a|| - r$

Soit $y \in \mathring{B}(x, \rho)$

Alors, par inégalité triangulaire : $\underbrace{||x - a||}_{>r} - \underbrace{||y - x||}_{\leq \rho} \leq ||y - a||$

Donc : $r - \rho \leq ||y - a|| \Rightarrow ||x - a|| \leq ||y - a|| \Rightarrow r \leq ||y - a||$ et donc $y \in C$

On en déduit : $\forall x \in C \ , \ \exists \rho > 0 \ , \ \mathring{B}(x, \rho) \subset C$
Donc C est un ouvert et donc A est un fermé.



1.2.3 Exemples

Exemples. *$\emptyset$ est un fermé.*
E est un fermé.
$[0, 1]$ est un fermé.
$]0; 1]$ n'est pas un fermé.
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ est un fermé.

1.2.4 Autres propriétés

Proposition. *Si $(A_n)_{1 \leq n \leq N}$ est une famille* **finie** *de fermés de E alors : $\bigcap_{n=1}^{N} A_n$ et $\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ sont des fermés de E*

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille **infinie** *de fermés de E alors : $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ est un fermé de E*

preuve : Soit $(A_n)_{1 \leq n \leq N}$ une famille de fermés de E.

- Posons $A = \bigcap_{n=1}^{N} A_n$ et montrons que A est fermé.

On notera A' le complémentaire de A dans E et A'_i celui de A_i

Alors $A' = \bigcup_{n=1}^{N} A'_n$ et comme les A'_n sont ouverts alors A' est ouvert et donc A est fermé.

- La démonstration pour l'union est du même type.

Remarque. *Une union quelconque de fermés n'est pas forcément un fermé, par exemple :* $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0; 2 - \frac{1}{n}] = [0, 2[$ *qui n'est pas un fermé.*

1.3 Partie bornée

Définition. *On dit qu'une partie* A *de* E *est bornée si et seulement si* $\exists M > 0$, $\forall x \in A$, $||x|| \leq M$

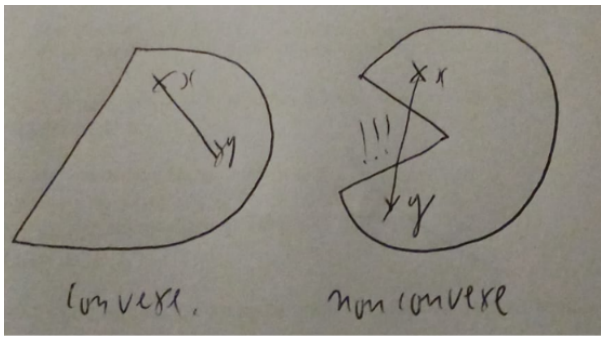
Remarques. *On a donc* $A \subset \mathring{B}(0_E, M)$
Plus généralement A *est bornée si* A *est inclu dans une boule (ouverte ou fermée).*
Les boules et les sphères sont donc bornées.
Une fonction f *d'un ensemble* X *à valeurs dans* E *est bornée si et seulement si* $f(X)$ *est une partie bornée de* E.

1.4 Partie convexe

Définition. *Soit* A *une partie de* E.
Alors on dit que A *est* **convexe** *si et seulement si* $\forall (x, y) \in A^2$, $\forall \lambda \in [0; 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$

Remarques. *Si* $(x, y) \in E^2$ *alors l'ensemble* $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \ , \ \lambda \in [0; 1]\}$ *est appelé "segment* xy*".*
On a alors : A *convexe si et seulement si* $\forall (x, y) \in A^2$, $[x, y] \subset A$

Exemples. Interprétation graphique



Lemme. *Les boules ouvertes (ou fermées) sont convexes.*

preuve : Soit $a \in E$ et $r > 0$. On note $A = \mathring{B}(a, r)$ la boule ouverte de centra a et de rayon r et on va montrer que A est convexe.

Soit $(x, y) \in A^2$ et $\lambda \in [0, 1]$

Alors : $||(\lambda x + (1 - \lambda)y) - a|| = ||(\lambda x + (1 - \lambda)y) - (\lambda a + (1 - \lambda)a|| = ||(\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)||$

Et par inégalité triangulaire : $||(\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)|| \leq \lambda ||x - a|| + (1 - \lambda) ||y - a|| < \lambda r + (1 - \lambda)r = r$ donc $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$

On a bien A convexe.

Remarque : même démonstration avec la boule fermée.

2 Suite d'un espace vectoriel normé et utilisation en topologie

Dans ce paragraphe $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé.

2.1 Préliminaires

2.1.1 Définition

Définition. *On appelle suite de E toute application de $\mathbb{N}$ dans E.*

Remarque. *Si u est une application de $\mathbb{N}$ dans E on note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite.*

2.1.2 Suite bornée

Définition. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $||u_n|| \leq M$*

2.1.3 Rappel

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \epsilon$

2.2 Convergence et divergence d'une suite dans un espace vectoriel normé

2.2.1 Définitions

Définitions. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $a \in E$.*
Alors on dit que la suite (u_n) converge vers a si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_n - a|| = 0$
Si la suite n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente

Remarques. *On se ramène donc, via la norme, aux suites à valeurs réelles.*
Attention, cette définition dépend de la norme !

2.3 Propriétés d'une suite convergente

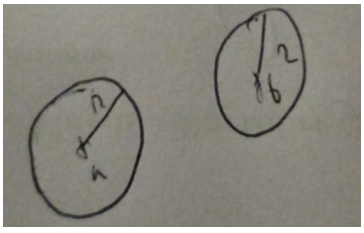
2.3.1 Unicité de la limite

Lemme. *Si la suite (u_n) converge vers a et vers b alors $a = b$.*

Remarques. *On note alors : $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$*
On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0_E \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} ||u_n - a|| = 0$

preuve : Supposons que (u_n) converge vers a et vers b

Raisonnons par l'absurde pour montrer que $a = b$



Si $a \neq b$ alors on peut poser $r = \frac{||b-a||}{3} > 0$
Alors (u_n) converge vers $a \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_1$, $||u_n - a|| \leq r$
De même (u_n) converge vers $b \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_2$, $||u_n - b|| \leq r$

Soit $N > Max(N_1, N_2)$ alors : $||u_n - a|| \leq r$ et $||u_n - b|| \leq r$

Mais $||a - b|| = ||(a - u_n) + (u_n - b)|| \leq ||a - u_n|| + ||u_n - b|| \leq r + r = 2\frac{||b-a||}{3}$
Mais comme $||a - b|| \neq 0$ on peut simplifier et on obtient $1 \leq \frac{2}{3}$!!!! ABSURDE

On a donc $a = b$

2.3.2 Une suite convergente est bornée

Lemme. *Si la suite (u_n) est convergente alors (u_n) est bornée*

Remarque. *La réciproque est évidemment fausse.*

preuve : (u_n) converge vers $a \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \geq N_1\ ,\ ||u_n - a||\leq 1$

Par inégalité triangulaire on a : $||u_n|| \leq ||u_n - a|| + ||a||$ donc $\forall n \geq N_1\ ,\ ||u_n|| \leq 1 + ||a||$

Posons : $M = Max(||u_0||, \ldots, ||u_{N_1}||, 1 + ||a||)$ (le max existe car il n'y a qu'un nombre fini de valeurs)

On a a alors : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ ||u_n|| \leq M$ et donc la suite (u_n) est bornée.

2.4 Opération sur les limites

Lemme. *Addition*
Soit (u_n) et (v_n) deux suites de E tels que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$
Alors : $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + b$

preuve : $||(u_n + v_n) - (a + b)|| = ||(u_n - a) + (v_n - b)|| \leq ||u_n - a|| + ||u_n - b|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On a donc bien $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + b$

Lemme. *Soit (λ_n) une suite de $K^{\mathbb{N}}$ et (v_n) une suite de E. Alors :*
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in E$ *et* $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in K \Rightarrow \lambda_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda a$

preuve : $||\lambda_n v_n - \lambda a|| = ||\lambda_n v_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a|| = ||\lambda_n(v_n - a) + (\lambda_n - \lambda)a|| \leq |\lambda_n|\,||v_n - a|| + |\lambda_n - \lambda|\,||a||$

Mais (λ_n) est convergente donc bornée et donc $\exists M > 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |\lambda_n| \leq M$

On a donc : $||\lambda_n v_n - \lambda a|| \leq M\,||v_n - a|| + ||a||\,|\lambda_n - \lambda| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On a bien $\lambda_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda a$

Lemme. *Produit*

Soit (λ_n) est une suite de $K^{\mathbb{N}}$ et (v_n) une suite de E alors : $\begin{cases} (v_n)\ \textit{bornée et}\ \lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow (\lambda_n v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E \\ (\lambda_n)\ \textit{est bornée et}\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E \Rightarrow (\lambda_n v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E \end{cases}$

preuve : Les preuves sont du même types que celles ci-dessus et sont ici laissées en exercices ...

2.5 Suites extraites

Définition. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E.*
Alors, on dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = u_{\varphi(n)}$

Remarque. *Comme φ est croissante alors on a forcément $\varphi(n) \geq n$.*

Exemples. *On a par exemple les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 36}$ ou encore $(u_{n^2+n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ...*

Lemme. *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.*

preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et a sa limite.
Soit une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$, montrons qu'elle converge vers a

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq N \Rightarrow |u_n - a| \leq \epsilon$
on utilise $\varphi(n) \geq n$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq N \Rightarrow \left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leq \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = a$

On a bien le résultat voulu.

Lemme. *(un exemple utile)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* E *et* $a \in E$. *Alors* $\begin{cases} u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \\ u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \end{cases} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$

preuve : Laissée en exercice

2.6 Adhérence, densité

2.6.1 Point adhérent, adhérence

Définitions. *Soit* A *une partie de* E. *Soit* $a \in E$.
Alors on dit que a *est un point adhérent à* A *si et seulement si* $\forall r > 0$, $\mathring{B}(a,r) \cap A \neq \emptyset$.
On note $\overline{A}$ *l'ensemble des points adhérents à* A.
$\overline{A}$ *est appelée adhérence de* A

Remarque. *On a* $A \subset \overline{A}$

Exemples. *exemple 1 : Si* A *est une partie bornée de* $\mathbb{R}$ *alors* $sup(A)$ *est un point adhérent à* A.
(remarque par extension si $sup(A) = +\infty$ *on dit que* $+\infty$ *est adhérent à* A. *Même chose avec* inf*)*

exemple 2 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est adhérent à* $GL_2(\mathbb{R})$

En effet : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{n^2+1} & 1 \\ 0 & \frac{1}{n^2+1} \end{pmatrix}}_{\in GL_n(\mathbb{R})}$

2.6.2 Caractérisation séquentielle

Proposition. *Soit* A *une partie de* E. *Soit* $a \in A$.
Alors a *est adhérent à* $A \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$

Remarque. *Autrement dit : a est adhérent à A si et seulement si a est limite d'une suite d'éléments de A.*

preuve : • Si a est adhérent à A
alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathring{B}(a, \frac{1}{n+1}) \cap A \neq \emptyset$
On peut donc choisir $a_n \in \mathring{B}(a, \frac{1}{n+1}) \cap A$
On a $||a_n - a|| \leq \frac{1}{n+1}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.
On a donc construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
Autrement dit : $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$

• Réciproquement
On suppose qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$
On a donc $\lim_{n\to+\infty} ||a_n - a|| = 0$
Soit $\epsilon > 0$. Alors par définition de la limite : $\exists N \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |a_n - a| \leq \epsilon$ et donc $\mathring{B}(a,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$
Comme le résultat est vrai pour tout $\epsilon > 0$ on a a adhérent à A.

Bilan : $\boxed{a \text{ est adhérent à } A \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} , \lim_{n\to+\infty} a_n = a}$

2.6.3 Lien avec les fermés

Proposition. *A est un fermé de E si et seulement si* $A = \overline{A}$

Remarque. *Autrement dit A est fermé si et seulement si A est l'ensemble de ses points adhérents.*
Ou encore si tout point adhérent de A est dans A (puisque l'autre inclusion est toujours vraie).

Corollaire. *A est un fermé de* $(E, ||.||)$ *si et seulement si toute suite convergente de* $A^{\mathbb{N}}$ *à sa limite dans A.*

preuve : • Supposons que A soit un fermé de $\mathbb{R}$
On sait que $A \subset \overline{A}$ est toujours vrai. Montrons l'autre inclusion.
Soit $a \in \overline{A}$
Raisonons par l'absurde. Si $a \notin A$
Alors, comme A est fermé, son complémentaire auquel appartient a est ouvert, donc $\exists \epsilon > 0$, $\mathring{B}(a, \epsilon) \cap A = \emptyset$ ce qui contredit $a \in \overline{A}$
Donc $a \in A$ et donc $\overline{A} \subset A$
Comme on a les deux inclusions on en déduit : $A = \overline{A}$

• Réciproquement
Supposons que $A = \overline{A}$ et montrons que A est fermé.
Soit $a \in E \backslash A$ (le complémentaire de A dans E)
Comme $A = \overline{A}$ on a $a \in E \backslash \overline{A}$, donc a n'est pas adhérent à $A = \overline{A}$ et donc $\exists r > 0$, $\mathring{B}(a, r) \cap A = \emptyset$
On en déduit $\exists r > 0$, $\mathring{B}(a, r) \subset E \backslash A$
On a bien démontrer que $E \backslash A$ était un ouvert et donc que A est fermé.

• Bilan : $\boxed{A \text{ est un fermé de } E \text{ si et seulement si } A = \overline{A}}$

2.6.4 Densité

Définition. *Soit A une partie de E. Alors on dit que A est dense dans E si et seulement si $\overline{A} = E$*

Remarque. *Autrement dit tout point de E est limite d'une suite d'éléments de A.*

Exemples. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (voir cours de sup)*
$GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ (preuve peut-être plus tard...)

2.6.5 Frontière : compléments Hors programme

Définition. *Soit A une partie de E. Alors on pose $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$*
∂A est appelée frontière de A

Remarques. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A (au sens de l'inclusion)*
$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A (au sens de l'inclusion)
$\partial A = \overline{A} \cap C_E(\mathring{A})$
Hors programme mais on utilisera un peu le mot dans le chapitre des fonctions de plusieurs variables.

Exemples. *La frontière de $]0; 2]$ est $\{0; 2\}$*
La frontière de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$
La frontière d'une boule est la sphère de même centre et de même rayon.

2.7 Invariance par norme équivalentes

2.7.1 Lemme préliminaires

Lemme. *Si E est muni de deux normes* **équivalentes** *N_1 et N_2.*
Alors toute partie ouverte pour l'une est ouverte pour l'autre.

Corollaire. *Les notions d'ouverts, de fermés, d'intérieurs, d'adhérence, de convergence de suites sont les mêmes pour deux normes équivalentes*

Corollaire. *Dans un K espace vectoriel* **de dimension finie** *les notions topologiques étudiées dans ce chapitre sont les mêmes indépendamment de la norme choisie.*

preuve :
• Pour montrer que les ouverts de (E, N_1) sont les mêmes que ceux de (E, N_2) (et inversement), on commence par montrer que toute boule ouverte de $(E, N1)$ contient une boule ouverte de (E, N_2)

On notera $\mathring{B}_1$ les boules ouvertes de (E, N_1) et $\mathring{B}_2$ les boules ouvertes de (E, N_2)

Soit $\mathring{B}_1(a,r)$ une boule ouverte de (E,N_1)

Comme N_1 et N_2 sont équivalentes alors, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in E\ ,\ N_1(x) \leq \alpha N_2(X)$

Soit $x \in \mathring{B}_2(a, \frac{r}{\alpha})$
Alors $N_2(x-a) < \frac{r}{\alpha} \Rightarrow \alpha N_2(x-a) < r \Rightarrow N_1(x-a) < r$ et donc $x \in \mathring{B}_1(a,r)$

On a montré que : $\mathring{B}_2(a, \frac{r}{\alpha}) \subset \mathring{B}_1(a,r)$

• Soit U un ouvert de (E,N_1)
Alors : $\forall x \in U\ ,\ \exists r > 0\ ,\ \mathring{B}_1(a,r) \subset U$

Avec, ce qui a été fait dans le premier point, on a : $\forall x \in U\ ,\ \exists r > 0\ ,\ \mathring{B}_2(a, \frac{r}{\alpha}) \subset U$

Donc U est un ouvert pour (E,N_2).

• Les ouverts de (E,N_1) sont des ouverts de (E,N_2). On démontre de même que : les ouvers de (E,N_2) sont des ouverts de (E,N_1) et on a le résultat voulu.

2.8 Cas particulier de la dimension finie : Convergence par coordonnée

Propriété. *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.*
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et soit $\lambda \in E$.
On écrit les u_n et λ dans la base B : $u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{n,i}e_i$ et $\lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$
Alors : $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \Leftrightarrow \forall i \in [\![1;p]\!]\ ,\ u_{n,i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_i$

preuve : Comme les normes dans E sont équivalentes, on va pouvoir choisir celles qui nous arrangent.

Première implication : $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \Rightarrow \forall i \in [\![1;p]\!]\ ,\ u_{n,i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_i$

On va utiliser la norme : $||u_n||_\infty = \max_{i\in[\![1;p]\!]} |u_{n,i}|$

Alors : $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \Rightarrow ||u_n - \lambda||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc, comme $\forall i \in [\![1;p]\!]\ ,\ 0 \leq |u_{n,i} - \lambda_i| \leq ||u_n - \lambda||_\infty$ on a par encadrements : $|u_{n,i} - \lambda_i| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\forall i \in [\![1;p]\!]\ ,\ u_{n,i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_i$

Deuxième implication : $\forall i \in [\![1;p]\!]\ ,\ u_{n,i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_i \Rightarrow (u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$

On va utiliser la norme : $||u_n||_1 = \sum_{i=1}^{p} |u_{n,i}|$
$\forall i \in [\![1;p]\!]\ ,\ u_{n,i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_i$
$\Rightarrow \forall i \in [\![1;p]\!]\ ,\ \lim_{n\to+\infty} |u_{n,i} - \lambda_i| = 0$
Comme la somme est finie on a : $||u_n - \lambda||_1 = \sum_{i=1}^{p} |u_{n,i} - \lambda_i| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
et donc $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$

2.9 Exemples

2.9.1 Exemple 1 : En dimension finie

Soit $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche : $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$

Après calculs on a : $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^{n-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En utilisant la convergence terme à terme on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.9.2 Exemple 2 : En dimension infinie

Dans $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$. On pose : $P_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $P_n(t) = t^n$ et on étudie la convergence de (P_n) pour la norme $N_1(P) = \int\limits_0^1 |P(t)|\,dt$ et pour la norme $N_2(P) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |P(t)|$

- On a : $N_1(P_n) = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Notont θ la fonction nulle de E. On a alors : $N_1(P_n - \theta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
donc (P_n) vers θ pour la norme N_1

- On a : $N_2(P_n) = 1$ donc $N_2(P_n - \theta)$ ne tend pas vers et (P_n) ne converge pas vers θ pour la norme N_2
- On peut en déduire que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

3 Limite et continuité

Dans cette partie on considère (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés.

3.1 Limite en un point adhérent

3.1.1 Définition

Définition. *Soit f une application d'une partie A de E dans F. Soit a un point adhérent à A et soit $b \in F$.*
Alors, on dit que : f admet b pour limite au point a
si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in A$, $N_E(x-a) \leq \eta \Rightarrow N_F(f(x)-b) \leq \epsilon$

Remarques. *Si $E = F = \mathbb{R}$ on retrouve les définitions vue en sup.*
Si $E = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{R}$ on peu étendre cette définition avec $-\infty$ et $+\infty$ comme en sup...

3.1.2 Propriétés

Propriété. *(Unicité de la limite)*
Si f admet b_1 et b_2 pour limites en a alors $b_1 = b_2$.

preuve : Même principe que pour les suites ou que pour les fonctions à valeurs réelles (cf cours de PCSI)

Notations On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$
On a alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} (f(x) - b) = 0_F \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} N_F(f(x) - b) = 0$

3.1.3 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème . *Soit une application f d'une partie A de E et à valeurs dans F.*
Soit a un point de E adhérent à A, soit $b \in F$
Alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$
si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$

preuve : • Première implication : Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = b$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ Montrons que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$

Soit $\epsilon > 0$
Alors, par définition de $\lim_{x\to a} f(x) = b$, il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in E\ ,\ N_E(x-a) < \eta \Rightarrow N_F(f(x)-b) < \epsilon$

Mais $\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \exists N\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq N \Rightarrow N_E(x_n - a) < \eta$

On a donc en combinant: $n \geq N \Rightarrow N_E(x_n - a) < \eta \Rightarrow N_F(f(x_n) - b) < \epsilon$

Donc $\forall \epsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq N \Rightarrow N_F(f(x_n) - b) < \epsilon$

Par définition de la limite on a bien : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$

• Deuxième implication :
On va plutôt raisonner par contraposition. C'est-à-dire que l'on va démontrer que si $f(x)$ ne tend pas vers b quand x tend vers a, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in N} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que x_n tend vers a et $f(x_n)$ ne tend pas vers b

La négation de $\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ ,\ \exists \eta > 0\ ,\ N_E(x-a) \leq \eta \Rightarrow N_F(f(x)-b) \leq \epsilon$
s'écrit : $\exists \epsilon' > 0\ ,\ \forall \eta > 0\ ,\ \exists x_\eta \in A\ ,\ N_E(x_\eta - a) \leq \eta$ et $N_F(f(x_\eta) - b) > \epsilon'$

Si on choisit : $\eta = \frac{1}{n+1}$ on a alors un $x_n = x_\eta$ tel que : $N_E(x_n - a) \leq \frac{1}{n}$ et $N_F(f(x_n) - b) > \epsilon'$ Mais $N_E(x_n - a) \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$
et $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ N_F(f(x_n) - b) \geq \epsilon' > 0$ donc $NON\Big(f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b\Big)$

On a le résultat voulu.

3.1.4 Opérations sur les limites

Lemme. *(addition)*
Soit f et g deux applications d'une partie A de E à valeurs dans F.
Soit $b_1, b_2 \in F$ et a un point adhérent à A.

$$\textit{Alors} \begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = b_1 \\ \lim_{x\to a} g(x) = b_2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a} (f+g)(x) = b_1 + b_2$$

preuve : Même principe que pour les suites ou que pour les fonctions à valeurs réelles (cf cours de PCSI)

Lemme. *(produit par un scalaire)*
Soit f une application d'une partie A de E à valeurs dans F.
Soit λ une application d'une partie A de E à valeurs dans K.
Soit $b \in F$, $\Lambda \in K$ et a un point adhérent à A.

$$\textit{Alors} \begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = b \\ \lim_{x\to a} \lambda(x) = \Lambda \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a} \lambda(x) f(x) = \Lambda b$$

preuve : Même principe que pour les suites ou que pour les fonctions à valeurs réelles (cf cours de PCSI)

Lemme. *(inverse)*
Soit λ une application d'une partie A de E à valeurs dans K.
Soit $b \in K$ tel que $b \neq 0$ et a un point adhérent à A.
Alors $\lim_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$

preuve : laissée en exercice

Lemme. *(composition)*
Soit (E, N_1), (F, N_2) et (G, N_3) trois espaces vectoriels normés.

Soit f une application d'une partie A de E à valeurs dans F.
Soit g une application d'une partie B de F à valeurs dans G.
On suppose que $f(A) \subset B$

Soit a un point adhérent à A. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Alors b est adhérent à B et $\lim_{y\to b} g(y) = c \in G \Rightarrow \lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$

preuve : • a adhérent à A donc $\exists (x_n)_{n_i n\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$

Comme $\lim_{x\to a} f(x) = b$, par caractérisation séquentielle de la limite on a : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$
Comme les $f(x_n)$ sont dans B on en déduit que : $\boxed{b \text{ est adhérent à } B}$

• Soit $(x_n)_{n_i n\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$
Alors, comme $\lim_{x\to a} f(x) = b$ on a : $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$
et comme $\lim_{y\to b} g(y) = c$ on a : $g(f(x_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$
Par caractérisation séquentielle de la limite on $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$

3.2 Continuité

3.2.1 Continuité en un point

Définition. *Soit f une fonction définie sur une partie A de E et à valeurs dans F. Soit $a \in A$.*
Alors on dit que f est continue en a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

3.2.2 Prolongement

Si a est un point adhérent à $A \subset E$ et si f est une fonction de A dans F, et si de plus : $\lim_{x\to a} f(x) = b \in F$, alors il y a deux cas :

cas 1 : $a \in A$
Alors $b = f(a)$

cas 2 : $a \notin A$
Alors a est adhérent à A.
f n'est pas définie en a mais on peut prolonger f en a en posant $\widetilde{f}(a) = b$.
On obtient alors une application $\widetilde{f} : A \cup \{a\} \to F$ et on vérifie aisément que celle-ci est continue en a.

On dit que l'on a **prolongé f par continuité en a.** Dans la pratique, et par abus de notation on conservera souvent la notation f pour le prolongement, au lieu de $\tilde{f}$

3.2.3 Caractérisation séquentielle

Théorème . *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*
Soit f une application d'une partie A de E et à valeurs dans F. Soit a un point de A.

Alors : f est continue au point a
si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$

preuve : C'est une conséquence directe de la caractérisation séquentielle de la limite

3.2.4 Continuité sur une partie

Définition. *Soit une application f une application d'une partie A de E et à valeurs dans F.*
Si f est continue en tout point de A, alors on dit que f **est continue sur** *A*

3.3 Opérations sur les fonctions continues

Théorème . • *Soit f et g deux applications continues sur une partie A de E à valeurs dans F.*
Alors $f+g$ est continue sur A.

• *Soit f une application continue sur une partie A de E à valeurs dans F et soit λ une application continue de A dans K.*
Alors λf est continue sur A.

• *Soit f une application continue sur une partie A de E à valeurs dans K qui ne s'annule pas sur A*
Alors $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est continue sur A.

• *Soit f une application continue sur une partie A de E à valeurs dans F et g une application continue de B dans G. On suppose $f(A) \subset B$*
Alors $g \circ f$ est continue sur A.

preuve : conséquence directe des propriétés sur les limites

3.4 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue

3.4.1 Théorème

Théorème . *Soit f une application continue de (E, N_E) dans (F, N_F).*
Alors : A est un fermé de $F \Rightarrow f^{-1}(A)$ est un fermé de E
A est un ouvert de $F \Rightarrow f^{-1}(A)$ est un ouvert de E

3.4.2 Corollaire

Corollaire. *Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors :*
$$\begin{cases} \{x \in E\ ,\ f(x) > 0\} \text{ est un ouvert} \\ \{x \in E\ ,\ f(x) = 0\} \text{ est un fermé} \\ \{x \in E\ ,\ f(x) \geq 0\} \text{ est un fermé} \end{cases}$$

preuve :
• Posons $A = \{x \in E\ ,\ f(x) \geq 0\}$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $A^{\mathbb{N}}$. On note $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

On a : $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ puisque f est continue. De plus $f(x_n) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ par passage à la limite et donc $x \in A$

Finalement toute suite convergente d'éléments de A à sa limite dans A, donc par caractérisation séquentielle des fermés on a A fermé.
On a donc : $\boxed{\{x \in E\ ,\ f(x) \geq 0\} \text{ est fermé.}}$

• On démontre de la même manière que : $\boxed{\{x \in E\ ,\ f(x) = 0\} \text{ est fermé.}}$

• Soit $B = \{x \in E\ ,\ f(x) > 0\}$
Le complémentaire de B dans $\mathbb{R}$ est $B' = \{x \in E\ ,\ f(x) \leq 0\}$
En appliquant le premier résultat à $-f$ on a B' fermé.
B' fermé donc son complémentaire est ouvert et donc B est ouvert.

$\boxed{\{x \in E\ ,\ f(x) > 0\} \text{ est donc un ouvert de } E}$

3.4.3 Exemples

Exemple 1 : $GL_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices inversibles de $M_2(\mathbb{R})$ est un ouvert.

L'application : $det : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, donc $det^{-1}(\{0\})$ est fermé et donc $\boxed{GL_2(\mathbb{R}) \text{ est ouvert de } M_n(\mathbb{R})}$

Exemple 2 : Montrons que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x < y^2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

On pose : $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & y^2 - x \end{array}$ qui est une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
On remarque alors que : $D = f^{-1}(]0, +\infty[)$
Donc, avec le théorème de 3.4.2 on a : $\boxed{D \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2.}$

3.5 Fonctions Lipschitzienne

Définitions. *Soit f une application d'une partie A de E et à valeurs dans F. Soit $k \geq 0$*
Alors on dit que : f est k-lipschitzienne de rapport k si et seulement si $\forall (x,y) \in A^2$, $||f(x) - f(y)||_F \leq k\,||x - y||_E$

On dit que f est lipschitzienne si et seulement si il existe $k \geq 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Théorème . *Soit f une application* **k-lipschitzienne** *d'une partie A de E et à valeurs dans F alors :*
f est continue sur A

preuve : • Soit $a \in A$.
Alors $||f(x) - f(a)||_F \leq k\,||x - a|| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$
Donc : $||f(x) - f(a)||_F \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et donc $\lim\limits_{x \to x} f(x) = f(a)$ qui donne f est continue en a.

• f étant continue en tout point de A, $\boxed{f \text{ est continue sur } A}$

Exemples. • *La norme est 1-lipschitzienne*

En effet, par la deuxième inégalité triangulaire : $\Big|\,||x|| - ||y||\,\Big| \leq ||x - y||$

• *Une projection orthogonale est 1-lipschitzienne.*

Soit p une projection orthogonale.
On sait que : $||p(x)||^2 + ||x - p(x)||^2 = ||x||^2$ donc $||p(x)|| \leq ||x||$

Par linéarité on a : $||p(x) - p(y)|| \leq ||x - y||$ donc p est 1-lipschitzienne.

3.6 Continuité par coordonnée quand l'espace d'arrivée est de dimension finie

Théorème . *Soit f une application d'une partie A de E et à valeurs dans F avec F de dimension finie.*
Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.
On note alors $\forall x \in A$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$ et $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ sont les coordonnées de $f(x)$ dans la base B.
On a ainsi définit n applications de A dans K, appelées applications coordonnées de f dans la base B.

On a alors : f continue sur $A \Leftrightarrow \forall k \in [\![1; n]\!]$, f_k est continue sur A

preuve : On utilise, selon l'implication, la norme 1 ou la norme infinie.
Comme dans la preuve pour les suites ...

3.7 Théorème des bornes atteintes

Théorème . **Toute fonction réelle continue sur une partie non vide, fermée et bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.**

preuve : Hors-programme

Remarque. *Autre formulation : Si f est une fonction à valeurs réelles continue sur une partie non vide, fermée, bornée de E un K espace vectoriel de dimension finie.*
Alors : $\exists a, b \in A$, $\forall x \in A$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

Exemple. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tel que* $f(M) = AM + BM + CM$

Par inégalités triangulaires : $\begin{cases} OM - OA \leq AM \\ OM - OB \leq BM \\ OM - OC \leq CM \end{cases}$ donc $f(M) \geq 3OM - (OA + OB + OC) = 3OM - f(O)$

Posons $R = \frac{2}{3}f(O)$ alors : $\forall M \in \mathbb{R}^2$, $OM \geq R \Rightarrow f(M) \geq f(O)$

D'autre part la boule fermée B de centre O et de rayon R est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, donc f atteint son minimum, noté m sur B

Comme O est dans B alors $f(O) \geq m$.

En combinant les deux résultats précédents : $f(M) \geq m$ pour tout $M \in \mathbb{R}^2$

Donc f est minorée et atteint son minimum sur $\mathbb{R}^2$.

3.8 Exemple de continuité

3.8.1 Applications linéaires

Théorème . *Soit f une application linéaire entre E un K espace vectoriel normé* **de dimension finie** *et F un K espace vectoriel normé. Alors f est continue*

preuve : Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soit $x \in E$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et on a : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$

Par l'inégalité triangulaire : $||f(x)||_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| ||f(e_i)||_F$

Si on pose $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ alors on sait que N_1 est une norme sur E.

Si on pose $K = \max_{i \in [\![1,n]\!]} ||f(e_i)||_F$ alors : $||f(x)||_F \leq K N_1(x)$

Par linéarité de f on a : $\forall (x, y) \in E^2$, $||f(x) - f(y)||_F \leq K N_1(x - y)$

Donc f est K lipschitzienne et donc f est continue.

3.8.2 Applications polynomiales

Définitions. *On appelle fonction monôme sur K^p toute fonction m de K^p dans K s'écrivant :*
$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, $m(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \prod_{k=1}^{n} x_k^{i_k}$ *avec* $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ *et* $\alpha \in K$

Une application de K^n dans K est dite polynomiale si c'est une combinaison linéaire finie de fonctions monômes sur K^p

Théorème . *Toute application polynomiale de K^n dans K est continue.*

preuve : laissée au lecteur

Exemple. *L'application det : $M_n(K) \longrightarrow K$ est continue.*

3.8.3 Applications multilinéaires

Définition. *Soit E_1, E_2, ... , E_p et F des K espaces vectoriels.*
Une application f de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ dans F est dite p-linéaire
si et seulement si $\forall i \in [\![1; p]\!]$ $\forall (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ *l'application partielle*

$$\begin{array}{cccc} f_i & : & E_i & \longrightarrow & F \\ & & x & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p) \end{array}$$ *est linéaire*

Théorème . *Si F est un K espace vectoriel normé et si E_1, E_2, ... , E_p sont des K espaces vectoriels de* **dimension finie**. *Alors toute application p-linéaire de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ dans F est continue.*

preuve : laissée au lecteur

Exemple. *L'application* $\begin{array}{cccc} pm & : & M_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & (A, B) & \mapsto & AB \end{array}$ *est continue.*

Sommaire

1 Topologie d'un espace vectoriel normé **1**
- 1.1 Ouverts . . . 1
  - 1.1.1 Point intérieur . . . 1
  - 1.1.2 Ouvert . . . 1
  - 1.1.3 Exemples . . . 1
  - 1.1.4 Propriétés . . . 2
- 1.2 Fermés . . . 3
  - 1.2.1 Définition . . . 3
  - 1.2.2 Propriétés . . . 3
  - 1.2.3 Exemples . . . 3
  - 1.2.4 Autres propriétés . . . 3
- 1.3 Partie bornée . . . 4
- 1.4 Partie convexe . . . 4

2 Suite d'un espace vectoriel normé et utilisation en topologie **5**
- 2.1 Préliminaires . . . 5
  - 2.1.1 Définition . . . 5
  - 2.1.2 Suite bornée . . . 5
  - 2.1.3 Rappel . . . 5
- 2.2 Convergence et divergence d'une suite dans un espace vectoriel normé . . . 5
  - 2.2.1 Définitions . . . 5
- 2.3 Propriétés d'une suite convergente . . . 5
  - 2.3.1 Unicité de la limite . . . 5
  - 2.3.2 Une suite convergente est bornée . . . 6
- 2.4 Opération sur les limites . . . 6
- 2.5 Suites extraites . . . 6
- 2.6 Adhérence, densité . . . 7
  - 2.6.1 Point adhérent, adhérence . . . 7
  - 2.6.2 Caractérisation séquentielle . . . 7
  - 2.6.3 Lien avec les fermés . . . 7
  - 2.6.4 Densité . . . 8
  - 2.6.5 Frontière : compléments Hors programme . . . 8
- 2.7 Invariance par norme équivalentes . . . 8
  - 2.7.1 Lemme préliminaires . . . 8
- 2.8 Cas particulier de la dimension finie : Convergence par coordonnée . . . 9
- 2.9 Exemples . . . 10
  - 2.9.1 Exemple 1 : En dimension finie . . . 10
  - 2.9.2 Exemple 2 : En dimension infinie . . . 10

3 Limite et continuité **10**
- 3.1 Limite en un point adhérent . . . 10
  - 3.1.1 Définition . . . 10
  - 3.1.2 Propriétés . . . 10
  - 3.1.3 Caractérisation séquentielle de la limite . . . 10
  - 3.1.4 Opérations sur les limites . . . 11
- 3.2 Continuité . . . 12
  - 3.2.1 Continuité en un point . . . 12
  - 3.2.2 Prolongement . . . 12
  - 3.2.3 Caractérisation séquentielle . . . 12
  - 3.2.4 Continuité sur une partie . . . 12
- 3.3 Opérations sur les fonctions continues . . . 13
- 3.4 Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue . . . 13
  - 3.4.1 Théorème . . . 13
  - 3.4.2 Corollaire . . . 13
  - 3.4.3 Exemples . . . 13
- 3.5 Fonctions Lipschitzienne . . . 14
- 3.6 Continuité par coordonnée quand l'espace d'arrivée est de dimension finie . . . 14
- 3.7 Théorème des bornes atteintes . . . 14
- 3.8 Exemple de continuité . . . 15
  - 3.8.1 Applications linéaires . . . 15
  - 3.8.2 Applications polynomiales . . . 15
  - 3.8.3 Applications multilinéaires . . . 15