A rendre le jeudi 19 novembre 2026

Devoir à la maison n°5 de Mathématiques

Code couleur :	noir	à chercher par tous
	bleu	un peu plus dur, (où complément)
	rouge	assez difficile
	vert	difficile

Exercice 1

Calculer, sans calculatrice et en expliquant votre méthode : $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Exercice 2

Soit $E = M_{3,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à trois coefficients identifiable à $\mathbb{R}^3$

Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'unique endomorphisme de E admettant A comme matrice relativement à la base canonique.

1°) Montrer qu'il existe un unique vecteur $u \in E$, de première coordonnée égale à 1 et vérifiant $Au = 2u$

On pose $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On note $B' = (u, v, w)$

2°) Montrer que B' est une base de E.
3°) Décomposer Av et Aw dans la base B'
4°) Déterminer P la matrice de passage de B à B'
5°) Sans calculer P^{-1} déterminer $T \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = PTP^{-1}$
6°) Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer T^n
7°) Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer A^n

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, -1, 1)$.
On pose $B = (u, v, w)$, $P = vect(u, v)$ et $D = vect(w)$

1°) Montrer que B est une base de E.

2°) Donner une équation cartésienne de P.

3°) Montrer que : $E = P \oplus D$

Soit f la symétrie par rapport à P et parallèlement à D.

4°) Déterminer la matrice de f relativement à B, puis relativement à B_c la base canonique de E.

Soit g l'endomorphisme de E admettant comme matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ relativement à B_c.

5°) Reconnaître la nature de g et déterminer ses éléments caractéristiques.

6°) g et f commutent-il ?

Exercice 4

Soit : $A = C^0([a, b],]0, +\infty[)$ et $m = \inf_{f \in A} \Big(\big(\int_a^b f(t)dt \big) \big(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \big) \Big)$

0) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1) Montrer que m existe.

2) Est-ce que m est atteint ?

Exercice 5

Soit $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$

1) Déterminer : $\lim_{n \to +\infty} u_n$

2) Déterminer : $\lim_{n \to +\infty} n u_n$

3) Déterminer la nature de $\sum u_n$

4) Déterminer la nature de $\sum (-1)^n u_n$

Problème : CENTRALE PSI 2026, mathématiques 2