Correction du devoir à la maison de Mathématiques n°4

Exercice 1

$A = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$ On effectue $C_1 \longleftarrow C_1 - C_2 - C_3$

$A = \begin{vmatrix} -2c & b+c & c+a \\ -2c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ -2c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} c & b+c & c+a \\ c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$ On effectue $\begin{cases} C_2 \longleftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \longleftarrow C_3 - C_1 \end{cases}$

$A = -2\begin{vmatrix} c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \\ c^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix} = -2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$ (on a factorisé C_1 par c, C_2 par b et C_3 par a)

On reconnaît alors un déterminant de Vandermonde et on a donc $\boxed{A = -2abc(b-c)(a-c)(a-b)}$

Exercice 2

1) Pour n au voisinage de $+\infty$ (et donc $\frac{1}{n}$ au voisinage de 0)
$\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3+2n+3}$
$= n(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}} - n(1+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3})^{\frac{1}{3}}$
$= n(1+\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})) - n(1+\frac{1}{3}(\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3})+o(\frac{1}{n^3})) = \frac{-2}{3n}+o(\frac{1}{n}) \sim \frac{-2}{3n}$
On a a aussi : $sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ donc $|a_n| \sim \frac{2}{3n^2} > 0$
Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors par la règle de l'équivalent $\sum |u_n|$ est convergente.

La série $\sum u_n$ est alors absolument convergente et donc $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

2) $b_n \sim \frac{n!}{(n+1)!2^n} \sim \frac{1}{(n+1)2^n}$ par comparaison factorielle puissance
Alors $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \sim \frac{(n+1)2^n}{(n+2)2^{n+1}} = \frac{(n+1)}{2(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} < 1$ donc par la règle de D'Alembert, $\boxed{\sum b_n \text{ est convergente.}}$ (et même absolument convergente).

3) On commence par comparer $2^{\sqrt{n}}$ et b^n. On a : $\frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n} = exp(ln(2)\sqrt{n} - nln(b))$

Cas 1 : $b \leq 1$
Alors $ln(b) \leq 0$ et $ln(2)\sqrt{n} - nln(b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
Donc $\frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n} = exp(ln(2)\sqrt{n} - nln(b)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et on a $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim 2^{\sqrt{n}}$

Cas 2 : $b > 1$
Alors $ln(b) > 0$ et $ln(2)\sqrt{n} - nln(b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (comparaison de puissances)
Donc $\frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n} = exp(ln(2)\sqrt{n} - nln(b)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on a $2^{\sqrt{n}} + b^n \sim b^n$

Revenons à c_n en gardant ces deux cas.

Cas 1 : $b \leq 1$

Alors $c_n \sim \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}} \sim a^n > 0$

Donc par la règle de l'équivalent on a : $\sum c_n$ et $\sum a^n$ qui sont de même nature.

Or $\sum a^n$ convergente $\Leftrightarrow 0 < a < 1$ car on reconnaît une série géométrique, donc, dans le cas $b \leq 1$:

$\sum c_n$ convergente $\Leftrightarrow 0 < a < 1$

Cas 2 : $b > 1$

Alors $c_n \sim \frac{a^n 2sqrtn}{b^n}$

$c_n \neq 0$ donc $\frac{c_{n+1}}{c_n} \sim \frac{a^{n+1} 2^{\sqrt{n+1}}}{b^{n+1}} \frac{b^n}{a^n 2^{\sqrt{n}}} \sim \frac{a}{b} exp((\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) ln(2))$

Mais $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}((1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} - 1) = \sqrt{n}(1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) - 1) = \frac{1}{2\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

On en déduit $exp((\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) ln(2)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $\frac{c_{n+1}}{c_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$

La règle de D'Alembert permet alors d'obtenir :

$\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b \Rightarrow \sum c_n$ convergente

et $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b \Rightarrow \sum c_n$ divergente

Si $a = b$ alors $c_n = 2^{\sqrt{n}}$ qui ne tend pas vers 0 et la série est grossièrement divergente.

Donc dans le cas 2 : $\sum c_n$ convergente $\Leftrightarrow a < b$

Bilan : $\boxed{\sum c_n \text{ convergente} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} b \leq 1 \\ a < 1 \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} b > 1 \\ a < b \end{cases} \end{cases}}$

Exercice 3

1°) $x \mapsto \frac{sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0; +\infty[$

A pose donc problème en 0 et $+\infty$

$\forall x \in]0; 1]$, $0 \leq \left| \frac{sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

Comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, alors, par la règle de comparaison $\int_0^1 \frac{sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ est absolument convergente donc convergente.

Au voisinage de $+\infty$: $\frac{sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} > 0$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, alors par la règle de l'équivalent $\int_1^{+\infty} \frac{sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ est convergente.

Bilan : $\int_0^1 \frac{sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ convergente et $\int_1^{+\infty} \frac{sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ convergente et donc $\boxed{A = \int_0^{+\infty} \frac{sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx \text{ est convergente.}}$

2°) $x \mapsto \frac{sin(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0;+\infty[$
B pose donc problème en 0 et $+\infty$

Au voisinage de 0 : $\frac{sin(t)}{\sqrt{t}} \sim \frac{t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$
$x \mapsto \frac{sin(t)}{\sqrt{t}}$ est donc prolongeable par continuité en 0, donc $\int_0^{\pi} \frac{sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ est convergente.

Soit $A > \pi$ alors par intégration par parties : $\int_{\pi}^{A} \frac{sin(t)}{\sqrt{t}}dt = [\frac{-cos(t)}{\sqrt{t}}]_{\pi}^{A} + \int_{\pi}^{A} \frac{cos(t)}{2t\sqrt{t}} = \frac{-cos(A)}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \int_{\pi}^{A} \frac{cos(t)}{2t\sqrt{t}}dt$

Mais $\left|\frac{cos(t)}{t\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ et comme $\frac{3}{2} > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, alors par la règle de l'équivalent $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{cos(t)}{2t\sqrt{t}}dt$ est absolument convergente donc convergente.

On en déduit que $\int_{\pi}^{A} \frac{sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ admet une limite finie quand $A \longrightarrow +\infty$ et donc que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ est convergente.

Finalement, en regroupant les deux points précédents, on peut en conclure que $\boxed{B \text{ est convergente.}}$

Exercice 4

1°) $u \neq 0_{L(E)}$ donc $Im(u) \neq \{0_E\}$ donc $dim(Im(u)) \geq 1$ et donc $rg(u) \geq 1$
$u^2 = 0_{L(E)} \Rightarrow det(u^2) = 0 \Rightarrow det(u)^2 = 0 \Rightarrow det(u) = 0$ donc $u \notin GL(E)$
Donc $rg(u) < 3$ ou encore $rg(u) \leq 2$

On a donc bien $\boxed{rg(u) \in \{1;2\}}$

2°) Soit $y \in Im(u)$.
Alors $\exists x \in E\ ,\ y = u(x)$, en composant par u : $u(y) = u^2(x) = 0_E$ car $u^2 = 0_{L(E)}$ et donc $y \in ker(u)$

On a donc : $\forall y \in Im(u)\ ,\ y \in Ker(u)$ et donc $\boxed{Im(u) \subset Ker(u)}$

3°) D'après le théorème du rang : $dim(Ker(u)) + rg(u) = dim(E) = 3$.
Mais, d'après 2°) : $rg(u) \leq dim(Ker(u))$, qui donne : $2rg(u) \leq dim(Ker(u)) + rg(u) = 3$ donc $rg(u) \leq \frac{3}{2}$.
Comme avec le 1°) $rg(u) \in \{1,2\}$ alors on en déduit : $\boxed{rg(u) = 1}$

4°) $rg(u) = 1$, on peut donc considérer (e_1) une base de $Im(u)$.
$Im(u) \subset Ker(u)$ et $Ker(u)$ est de dimension 2 par le théorème du rang, donc, on peut compléter (e_1) en (e_1, e_2) une base de $Ker(u)$.
On complète maintenant (e_1, e_2) en $B' = (e_1, e_2, e_3')$ une base de E.
$e_1 \in Ker(u)$ donc $u(e_1) = 0_E$, de même $e_2 \in Ker(u)$ donc $u(e_2) = 0_E$
$u(e_3') \in Im(u) = Vect(e_1)$ donc $\exists a \in \mathbb{C}\ ,\ u(e_3') = ae_1$. On a $a \neq 0$ car sinon $u = 0_{L(E)}$
On pose alors $e_3 = \frac{e_3'}{a}$ et on a $u(e_3) = \frac{1}{a}u(e_3') = e_1$
Comme $B = (e_1, e_2, e_3)$ reste une base on a alors bien : $\boxed{M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Exercice 5

1) Soit $x \in \mathbb{R}^3$.
$x \in Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3\ ,\ x = (u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})(y)$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3\ ,\ x = u^2(y) + y$ on compose par u
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3\ ,\ u(x) = u^3(y) + u(y)$ on utilise $u^3 = -u$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3\ ,\ u(x) = -u(y) + u(y)$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3\ ,\ u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$
$\Rightarrow x \in ker(u)$

Donc $x \in Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \Rightarrow x \in ker(u)$ et donc $\boxed{Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \subset ker(u)}$

2) • $x \in ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \cap ker(u) \Rightarrow \begin{cases} u^2(x) + x = 0_{\mathbb{R}^3} \\ u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc $ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3} \cap ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et donc la somme $ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) + ker(u)$ est directe.
• Avec le 1) on a $dim(Ker(u)) \geq dim(Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}))$ donc
$dim(Ker(u)) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) \geq dim(Im(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) = 3$ (par le théorème du rang) On a donc $dim(Ker(u)) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) \geq 3$ et on en déduit
$dim(Ker(u) + ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) = dim(Ker(u)) + dim(ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})) = 3$ puisque la somme est directe.

Au bilan : $\boxed{\mathbb{R}^3 = Ker(u)) \oplus ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})}$

3)a) $u^3 = -u$ donc $det(u)^3 = det(-u)$. On est en dimension 3, donc $det(u)^3 = (-1)^3 det(u)$ et donc $det(u^3) = -det(u)$
Ce qui donne $det(u) = 0$ ou $det(u^2) + 1 = 0$, mais la dernière égalité est impossible car $det(u) \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{det(u) = 0}$

3)b) Comme $det(u) = 0$ alors u n'est pas bijective, donc n'est pas injective donc $\boxed{ker(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$

4) Comme u n'est pas nul alors $ker(u) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
Soit donc $e_2 \in ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$ un vecteur non nul.
D'après b), on peut choisir $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ tel que $e_1 \in ker(u)$
On pose $e_3 = u(e_2)$

Montrons que $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$
On remarque que $(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})(e_3) = u^2(e_3) + e_3 = \underbrace{u^3}_{u^3 = -u}(e_2) + u(e_2) = -u(e_2) + u(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$
donc $e_3 \in ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$
On a donc $\underbrace{ae_1}_{\in ker(u)} = \underbrace{-be_2 - ce_3}_{\in ker(u^2 + Id_{\mathbb{R}^3})}$, donc, avec la somme directe du 2) : $\begin{cases} ae_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$
Comme $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ on en déduit déjà $a = 0$
En composant par u : $be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow bu(e_2) + cu(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ mais $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$ car $e_2 \in ker(U^2 + Id_E)$ et donc $\begin{cases} be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ -ce_2 + be_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$
On fait $bL_1 - cL_2$ et on obtient : $(b^2 + c^2)e_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, comme $e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $b^2 + c^2 = 0$ et comme b et c sont réels alors $b = c = 0$
Finalement $a = b = c = 0$ et donc B est libre. Comme $card(B) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$ alors B est une base de $\mathbb{R}^3$

On a $u(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = -e_2$ donc :

la matrice de u relativement à B s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Problème Nilpotence

1°) a) $tr(A) = -1 + 1 + 0 = 0$, $det(A) = 0 + 0 + 3 - 1 - 2 - 0 = 0$ (Sarrus), $det(A) = 0$ donc $rg(A) < 3$, comme les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires alors $rg(A) \geq 2$. Finalement $rg(A) = 2$.

Bilan : $\boxed{tr(A) = 0,\ det(A) = 0 \text{ et } rg(A) = 2}$

1°) b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = O$ donc $\boxed{A \text{ est nilpotente.}}$

2°) $inf(\{k \in \mathbb{N}^*\ ,\ M^k = O\})$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (puisque M est nilpotente) et minorée donc : $\boxed{p \text{ est bien défini.}}$

$\boxed{\text{La matrice } A \text{ du 1°) a pour indice de nilpotence 3.}}$

3°) a) $M \in \mathscr{N} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*\ ,\ M^k = O \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*\ ,\ (M^k)^T = O \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*\ ,\ (M^T)^k = O \Rightarrow M^T \in \mathscr{N}$

On a donc $\boxed{M \in \mathscr{N} \Rightarrow M^T \in \mathscr{N}}$

3°) b) Puisque N semblable à M alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $N = PMP^{-1}$
On sait alors que : $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ N^k = PM^kP^{-1}$.
Si de plus M est nilpotente alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = O$ et on a alors $N^p = O$ et donc $N \in \mathscr{N}$

$\boxed{\text{Si } N \text{ est semblable à } M \in \mathscr{N} \text{ alors } N \in \mathscr{N}}$

4°) $M, N \in \mathscr{N} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^*\ ,\ N^p = O\ ,\ M^q = O$
Si de plus $MN = NM$ alors $(MN)^p = M^pN^p = O$ car $N^p = O$ et donc $MN \in \mathscr{N}$
On a aussi, si $MN = NM$, par la formule du binôme :
$(M+N)^{2p+2q} = \sum_{k=0}^{2p+2q} \binom{n}{k} M^k N^{2p+2q-k}$
Si $k \geq p$ alors $M^k = M^pM^{k-p} = O$ et si $k < p$ alors $2p + 2q - k \geq p + 2q \geq q$ et alors $N^{2p+2q-k} = O$
On a donc $(M+N)^{2p+2q} = O$ et donc $M + N \in \mathscr{N}$

$$\boxed{\begin{cases} M, N \in \mathscr{N} \\ MN = NM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \in \mathscr{N} \\ M + N \in \mathscr{N} \end{cases}}$$

5°) $MN \in \mathscr{N}$
$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}^*\ ,\ (MN)^p = O \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}^*\ ,\ N(MN)^pM = O \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}^*\ ,\ (NM)^{p+1} = O \Rightarrow NM \in \mathscr{N}$

On a donc : $\boxed{MN \in \mathscr{N} \Rightarrow NM \in \mathscr{N}}$

6°) a) Par l'absurde. Si $\forall x \in \mathbb{R}^n\ ,\ f^{p-1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ alors $f^{p-1} = 0_{L(E)}$, ce qui contredit le fait que p soit l'indice de nilpotence de f. On a donc : $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}^n\ ,\ f^{p-1}(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}}$

6°) b) Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que : $\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$
On peut alors poser $i = Min(\{k \in [\![0; p-1]\!] \ , \ a_k \neq 0\})$ et on a $\sum_{k=i}^{p-1} a_k f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$
En composant par f^{p-1-i} on a : $\sum_{k=i}^{p-1} a_k f^{k+p-i}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$
Et comme pour $k > i$ on a $f^{k+p-i} = 0_{L(E)}$ alors il reste $a_i f^{p-1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow a_i = 0$ puisque $f^{p-1}(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ ce qui contredit la définition de i. Absurde.

On a donc $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) = (0, 0, \ldots, 0)$ et on a montrer que $\boxed{\text{la famille } (x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre dans } \mathbb{R}^n}$

6°) c) Une famille libre de E possède au plus n éléments, donc avec la famille du b) on a : $\boxed{p \leq n}$

7°) On a déjà l'implication évidente $M^n = O \Rightarrow M \in \mathscr{N}$ (par définition de nilpotente)
Réciproquement : $M \in \mathscr{N} \Rightarrow M^p$ avec p l'indice de nilpotence de M.
Comme $\forall k \geq p$ on a $M^k = M^p M^{k-p} = O$, en particulier pour $k = n \geq p$ (par le 6°)c)), on a $M^n = O$

Bilan : $\boxed{\text{Pour } M \in E \text{ on a : } M \in \mathscr{N} \Leftrightarrow M^n = O}$

8°) On utilise l'analogie avec le DL : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
Soit $M \in \mathscr{N}$. On note p l'indice de nilpotence de M.
Posons $L = \sum_{k=0}^{p-1} M^k$, alors $L(I_n - M) = \sum_{k=0}^{p-1} M^k - \sum_{k=0}^{p-1} M^{k+1} = I_n - M^p$ par téléscopage. Mais comme $M^p = O$ alors $L(I_n - M) = I_n$ et donc $I_n - M$ est inversible et $(I_n - M)^{-1} = L$.

Bilan : $\boxed{\text{Si } M \in \mathscr{N} \text{ alors } I_n - M \text{ est inversible et } (I_n - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} M^k}$

9°) Soit $M \in \mathscr{N}$ d'indice de nilpotence n.
On utilise le 6°) avec $p = n$ et les mêmes notations. La famille $B = (f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \ldots, f(x), x)$ est aloprs une famille libre de $\mathbb{R}^n$ de cardinal $n = dim(E)$, c'est donc une base de E.
La matrice de f dans cette base est celle voulue et elle est semblable à M puisque qu'elles représentent le même endomorphisme.

On a donc : $\boxed{\text{Si } M \in \mathscr{N} \text{ d'indice de nilpotence } n \text{ alors } M \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

10°) a) On a $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour calculer $det(S)$ on commence par faire $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ et on a :

$$det(S) = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ n-1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On factorise la première colonne par $n-1$ et on la retranche à toute les autres. On obtient :

$$det(S) = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Comme on a le déterminant d'une matrice triangulaire, on peut conclure : $\boxed{det(S) = (-1)^{n-1}(n-1)}$

Comme $n \geq 2$ alors $det(S) \neq 0$ et donc $\boxed{S \text{ est inversible.}}$

10°) b) On remarque que $N \in \mathscr{N} \Rightarrow N^p = O \Rightarrow det(N)^p = 0 \Rightarrow det(N) = 0 \Rightarrow N$ non inversible.

Alors : $K \in \mathscr{N}$ et $K^T \in \mathscr{N}$ et $S = K + K^T \notin \mathscr{N}$ puisque S est inversible.

$\mathscr{N}$ n'est pas stable par combinaison linéaire donc $\boxed{\mathscr{N} \text{ n'est pas un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel.}}$

10°) c) Après calculs, on remarque que : $S^2 = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & n-2 \\ n-2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n-2 \\ n-2 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$

Donc $S^2 = (n-1)I_n + (n-2)S$, on a bien $\boxed{S^2 \in Vect(I_n, S)}$

De plus $S(S-(n-2)I_n) = (n-1)I_n \Rightarrow S(\frac{S-(n-2)I_n}{n-1}) = I_n$ donc $\boxed{S^{-1} = \frac{S-(n-2)I_n}{n-1}}$

BONUS : début de Centrale mathématiques 2, 2019

Q1) Si u est un endomorphisme nilpotent d'indice 1 alors, par définition : $u^1 = 0_{L(E)}$

Le seul endomorphisme nilpotent d'indice 1 est l'endomorphisme nul.

Q2) Par l'absurde. Si $\forall x \in E\ ,\ u^{p-1}(x) = 0_E$ alors $u^{p-1} = 0_{L(E)}$ et donc u est nilpotent d'indice au plus $p-1$ ce qui contredit la définition de p.
On a donc : $\exists x \in E\ ,\ u^{p-1}(x) \neq 0_E$

Q3) Raisonnons une nouvelle fois par l'absurde.
Si $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est liée alors $\exists (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tel que
$(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ et $\sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x) = 0_E$

Comme $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ alors on peut poser $p_0 = \inf(\{k \in [\![0; p-1]\!]\ ,\ a_k \neq 0\})$
On a alors : $\sum_{k=p_0}^{p-1} a_k u^k(x) = 0_E$.
On compose alors par u^{p-1-p_0} (on a bien $p-1-p_0 \geq 0$) et on obtient :
$\sum_{k=p_0}^{p-1} a_k u^{k+p-1-p_0}(x) = 0_E$ mais pour $k > p_0$ on a $k+p-1-p_0 \geq p$ et donc $u^{k+p-1-p_0}(x) = 0_E$
Il reste alors : $a_{p_0} u^{p-1}(x) = 0_E$ et donc $a_{p_0} = 0$ puisque $u^{p-1}(x) \neq 0_E$
Mais ceci contredit la définition de p_0 !! Absurde.

On a donc la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.

Comme en dimension 2 une famille libre possède au plus 2 vecteurs on a alors $p-1+1 \leq 2 \Rightarrow p \leq 2$
Or on sait que $p \geq 2$ donc forcément $p = 2$

Q4) Comme $p = 2$ on a $u^2 = 0$ Soit $y \in E$.
$y \in Im(u) \Rightarrow \exists x \in E\ ,\ u(x) = y \Rightarrow \exists x \in E\ ,\ u^2(x) = u(y) \Rightarrow \exists x \in E\ ,\ u(y) = 0_E \Rightarrow y \in ker(u)$ puisque $u^2 = 0$

On a donc $Im(u) \subset ker(u)$

D'autre part, $u \neq 0$ donc $rg(u) \geq 1$ et $u^2 = 0 \Rightarrow det(u^2) = 0 \Rightarrow det(u) = 0 \Rightarrow rg(u) < 2$
Donc forcément $rg(u) = 1$ et alors : $dim(Im(u)) = 1$
Par le théorème du rang appliqué à u on a : $dim(ker(u)) + dim(Im(u)) = 2$ et donc $dim(ker(u)) = 1$

Puisque $Im(u) \subset ker(u)$ et $dim(ker(u)) = dim(Im(u)) = 1$ alors $Ker(u) = Im(u)$

Q5) En choisissant le x des questions Q2) et Q3) on a : $B = (x, u(x))$ qui est une famille libre de cardinal 2 d'un espace vectoriel de dimension 2 et donc B est une base de E.
Comme $u(x) = u(x)$ et $u(u(x)) = u^2(x) = 0_E$ alors la matrice de u relativement à B vaut $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2$

Q6) • Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice de nilpotence p. On sait que $p = 1$ ou $p = 2$ par $Q3$)

Cas 1 : $p = 1$: Alors d'après Q1) $A = 0$ et donc $tr(A) = det(A) = 0$

Cas 2 : $p = 2$: Alors d'après Q5) A est semblable à J_2 et donc $tr(A) = det(A) = 0$

• Réciproquement, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{C})$ de trace et de déterminant nulle.

Alors $tr(A) = 0 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow d = -a$ et donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

Après calculs : $A^2 = \begin{pmatrix} -det(A) & 0 \\ 0 & -det(A) \end{pmatrix}$ et donc comme $det(A) = 0$ alors $A^2 = 0$ et donc A est nilpotente.

Remarque : on verra plus tard le théorème de Hamilton-Cayley qui affirme que si $A \in M_2(\mathbb{C})$ alors $X^2 - tr(A)X + det(A)$ est un polynôme annulateur de A. Donc, ici $A^2 = 0$ et donc A est forcément nilpotente.

• Bilan :

Les matrices nilpotentes de $M_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.

Q7) u est nilpotent d'indice 2, donc $u^2 = 0$ et on montre que $Im(u) \subset Ker(u)$ comme en Q4).
En passant à la dimension on a : $dim(Im(u)) \leq dim(ker(u))$
En ajoutant $dim(Im(u))$ on a : $2dim(Im(u)) \leq dim(ker(u)) + dim(ker(u))$
Par le théorème du rang on a $dim(ker(u)) + dim(ker(u)) = n$ donc $2dim(Im(u)) \leq n$ et donc $2r \leq n$

On a bien : $Im(u) \subset Ker(u)$ et $2r \leq n$

Q8) Si on suppose de plus $Im(u) = Ker(u)$ et donc $dim(Im(u)) = dim(Ker(u))$ alors par le théorème du rang $dim(ker(u)) + dim(ker(u)) = n \Rightarrow 2dim(Im(u)) = n \Rightarrow 2r = n$

Soit $(e'_1, \ldots, e'_r)$ une base de $Im(f)$ (qui est de dimension r)
Comme $\forall i \in [\![1; r]\!]$, $e'_1 \in Im(f)$ alors on il existe $e_i \in E$ tel que $e'_i = u(e_i)$.

Considérons donc $B = (e_1, e'_1, e_2, e'_2, \ldots, e_r, e'_r) = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r))$
Montrons que B est libre.
Soit $(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r)$ tel que $\sum_{i=1}^{r}(a_i e_i + b_i u(e_i)) = 0_E$
On compose par u et on a, par linéarité de u et puisque $u^2 = 0$: $\sum_{i=1}^{r} a_i u(e_i) = 0_E$
Mais comme $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une base de $Im(u)$ alors $\forall i \in [\![1; r]\!]$, $a_i = 0$
Il reste alors $\sum_{i=1}^{r} b_i u(e_i) = 0_E$ et pour la même raison $\forall i \in [\![1; r]\!]$, $b_i = 0$
Finalement la famille B est libre, comme elle est de cardinal $2r = n$ c'est une base de E.

On a donc il existe des vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ de E tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r))$ est une base de E.

Q9) On a $u(e_i) = u(e_i)$ et $u(u(e_i)) = u^2(e_i) = 0_E$, donc la matrice de u dans cette base est de la forme : $diag(J_2, \ldots, J_2)$

Q10) On a toujours $Im(u) \subset Ker(u)$ puisque $u^2 = 0$ mais cette fois-ci, l'inclusion est stricte car $Im(u) \neq Ker(u)$
On a donc $2r < n$

Soit $(e'_1, \dots, e'_r)$ une base de$Im(f)$ (qui est de dimension r) que l'on complète en $(e'_1, \dots, e'_r, v_1, \dots, v_{n-2r})$ une base de $Ker(u)$. (on a le bon nombre de vecteur car $dim(ker(u)) = n - rg(u) = n - r$)
Comme $\forall i \in [\![1; r]\!]$, $e'_1 \in Im(f)$ alors on il existe $e_i \in E$ tel que $e'_i = u(e_i)$.

Considérons $B = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_{n-2r})$.

Soit $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_{n-2r})$ tel que $\sum_{i=1}^{r}(a_i e_i + b_i u(e_i)) + \sum_{j=1}^{n-2r} c_j v_j = 0_E$
On compose par u et on a, par linéarité de u et puisque $u^2 = 0$: $\sum_{i=1}^{r} a_i u(e_i) = 0_E$
Mais comme $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $Im(u)$ alors $\forall i \in [\![1; r]\!]$, $a_i = 0$
Il reste alors $\sum_{i=1}^{r} b_i u(e_i) + \sum_{j=1}^{n-2r} c_j v_j = 0_E$ et comme $(e'_1, \dots, e'_r, v_1, \dots, v_{n-2r})$ est une base de $Ker(u)$
alors $\forall i \in [\![1; r]\!]$, $b_i = 0$ et $\forall j \in [\![1; n-2r]\!]$, $c_j = 0$
Finalement la famille B est libre, comme elle est de cardinal $2r + n - 2r = n$ c'est une base de E.

On a donc :
il existe des vecteurs $e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_{n-2r}$ de E tels que :
$(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ est une base de E.

Q11) Comme $u(v_j) = 0_E$ on a comme en Q9) : la matrice de u dans cette base est de la forme : $diag(J_2, \dots, J_2, 0, \dots, 0)$