Devoir surveillé de Mathématiques n°3 : TYPE 2

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
• Dessiner un soleil en dessous du mot **FIN**.
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.
• Utiliser uniquement des feuilles doubles et les numérotées en bas à droite de la manière suivante : (feuille n°X)/(nombre totale de feuilles)
• Mettre son nom et son prénom en haut à gauche de chaque feuille double

---

Problème 1

Dans tout le problème $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On désigne par E un espace vectoriel sur K de dimension n avec $n \geq 1$

On note $L(E)$ le K-espace vectoriel des endomorphismes de E. On note $M_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$ et I_n la matrice unité de $M_n(K)$.

Pour $f \in L(E)$, on note $f^0 = id_E$ et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$ où id_E désigne l'application identité de E.

On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0_{L(E)}$. Le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f.

I) Noyaux itérés

Soit $f \in L(E)$, on note pour tout entier naturel k : $N_k = ker(f^k)$ et $I_k = Im(f^k)$

1) Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2) Justifier l'existence d'un plus petit entier q tel que : $N_q = N_{q+1}$

3) Montrer que : $I_q = I_{q+1}$

4) Montrer que : $E = N_q \oplus I_q$

5) On considère pour tout entier naturel k, φ_k la restriction de f à I_k
a) Montrer que : $dim(I_k) - dim(I_{k+1}) = dim(Ker(f) \cap I_k)$
b) En déduire que la suite $\big(dim(N_{k+1}) - dim(N_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

II) Endomorphismes nilpotentes d'ordre $n-1$

Soit U une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé a U

6) Soit r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $Im(u^r)$
a) Vérifier que : $Im(v) = Im(u^{s+r})$
b) Montrer que : $Ker(v) \subset Ker(u^s)$
c) Montrer que : $dim(Ker(u^{r+s})) \leq dim(Ker(u^r)) + dim(Ker(u^s))$
d) En déduire que pour tout entier naturel i, $dim(Ker(u^i)) \leq i$

7) On suppose de plus que : $U^n = 0$
a) Montrer que pour tout entier i tel que : $1 \leq i \leq n$, $dim(Ker(u^i)) = i$
b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n.
c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que : $B_e = \big(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\big)$ soit une base de E
d) Écrire la matrice de u dans la base B_e

8) Montrer que deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$ sont semblables.

III) Cycles

Dans cette partie, on prend $K = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe $x_0 \in E$ vérifiant les conditions :
$\begin{cases} f^p(x_0) = x_0 \\ \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big) \text{ est une famille génératrice de } E \text{ dont les éléments sont distincts deux à deux} \end{cases}$

On dit alors que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est un p-cycle de f

9) Soit $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ un p-cycle de f.
a) Montrer que : $f^p = id_E$
b)Montrer que l'ensemble $F_{x_0} = \{k \in \mathbb{N}^* \ , \ \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\big) \text{ est une famille libre}\}$
admet un maximum noté γ
c) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$ on a : $f^k(x_0) \in Vect\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{\gamma-1}(x_0)\big)$
d) Montrer que : $\gamma = n$

10) Soit $B_{x_0} = \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ un n-cycle de f
a) Justifier que B_{x_0} est une base de E
b) Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base B_{x_0}
c) On pose $\omega = exp\big(\frac{2i\pi}{n}\big)$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^k \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$, où $\overline{\omega}$ désigne le conjugué de ω

Pour tout entier k tel que : $1 \leq k \leq n$, vérifier qu'il existe $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tel que : $GU_k = \alpha_k U_k$

11) Soit $M = (m_{k,\ell})_{1 \leq k,\ell \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $m_{k,\ell} = \overline{\omega}^{kl}$
On note $\overline{M} = (\overline{m_{k,\ell}})_{1 \leq k,\ell \leq n}$
a) Calculer $M\overline{M}$
b) En déduire que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et déterminer M^{-1}

12) Soit $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ On pose : $B = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \ldots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$

Trouver une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice $\Delta \in M_n(\mathbb{C})$ telle que :

D soit diagonale et $B = P\Delta P^{-1}$

Problème 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré plus petit que n.
Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que P est de degré n quand a_n est non nul et a_n s'appelle alors le coefficient dominant de P.
Pour tout entier naturel n, on appelle c_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Partie I.

1) Vérifier que pour tout entier naturel n, la fonction c_n est continue sur $[-1, 1]$

2) Pour $x \in [-1, 1]$, donner une expression polynomiale de $c_0(x), c_1(x), c_2(x)$

3) Représenter graphiquement dans un même repère orthonormal les fonctions c_0, c_1, c_2

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-1,1],\ c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x)$

5) Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.

6) Prouver que pour tout n, la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

7) Montrer que pour $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a : $T_n(x) = c_n(x)$

Partie II.

Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$

8) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
Dans toute la suite du problème, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On pose $I_{p,q} = \int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta$

9) Calculer $I_{p,q}$ pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

10)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ définie en partie **I** est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

10)b) Prouver que pour tout entier naturel n non nul, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

10)c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (X^n|T_n) = \frac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des réels et $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

11) a) Justifier l'existence d'une unique famille de réels $(b_k)_{0\le k\le n}$ telle que l'on ait $P = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k$

11)b) Calculer b_n

11)c) Montrer que l'on a $\|P\|^2 \ge \frac{\pi}{2} b_n^2$

11)d) En déduire la valeur de

$$K = \inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Partie III.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$

12) Vérifier que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynôme T_n défini dans la partie **I**.

Soit $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associée à $(x_1, \ldots, x_n)$

13) Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall G \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(x_i) \ \text{ avec } \ \forall j \in [|1, n|],\ \lambda_j = \int_{-1}^{1} \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Soit $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

14)a) Justifier l'existence et l'unicité deux polynômes S et U de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que $R = ST_n + U$

14)b) Montrer que : $\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i)$

Dans toute cette question on fixe $k \in [\![1, n]\!]$

15)a) Montrer que : $T_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sin(\theta_k)}$

Soit la fonction ψ_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \neq x_k,\ \psi_k(x) = \frac{T_n(x)}{(x-x_k)T_n'(x_k)}$ et $\psi_k(x_k) = 1$

15)b) Vérifier que pour tout réel x, $\psi_k(x) = L_k(x)$

15)c) Soit $j \in \mathbb{N}$. Calculer : $\lim_{\theta \to \theta_k} \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}$

En déduire que l'intégrale $u_j = \int_0^{\pi} \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}\, d\theta$ existe.

Montrer que $\lambda_k = \frac{(-1)^{k+1}}{n} u_n \sin(\theta_k)$

15)d) Vérifier que : $\forall j \in \mathbb{N}$, $u_{j+2} - 2u_{j+1}\cos(\theta_k) + u_j = 0$

15)e) Montrer que : $\lambda_k = \frac{\pi}{n}$

16) Démontrer que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ on a la relation :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} R\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)$$