Devoir surveillé de Mathématiques n°3 : TYPE 1

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
• Dessiner un arbre en dessous du mot **FIN**.
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.
• Utiliser uniquement des feuilles doubles et les numérotées en bas à droite de la manière suivante : (feuille n°X)/(nombre totale de feuilles)
• Mettre son nom et son prénom en haut à gauche de chaque feuille double

---

Problème 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré plus petit que n.

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que P est de degré n quand a_n est non nul et a_n s'appelle alors le coefficient dominant de P.

Partie I.

Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.

2) Prouver que pour tout n, la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$

Partie II.

Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

4) En effectuant le changement de variable C^1 bijectif $\theta = arccos(t)$ montrer que $(P|Q)$ est une intégrale convergente.

5) Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

6) Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On pose $I_{p,q} = \int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta$.
Démontrer que si $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$ et calculer $I_{p,p}$

7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ définie en partie **I** est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

Problème 2

Dans tout ce problème, on désigne par n un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle alors qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est nilpotent s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $f^k = 0$, et dans ce cas, on appelle indice de nilpotence p de f le plus petit entier k tel que $f^k = 0$
Ainsi, f est nilpotent d'indice p si et seulement si $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$
On peut définir de façon analogue les matrices nilpotentes dans l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on notera $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices nilpotentes.
L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ et des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$.

I) Exemples de matrices nilpotentes

1°) On considère dans cette question les deux matrices suivantes de $M_n(\mathbb{R})$ (dont les éléments sont tous nuls, à l'exception d'un seul qui est égal à 1) : $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer les puissances des matrices A et B. Ces matrices sont-elles nilpotentes ?

b) Calculer les puissances $(A+B)^q$ en distinguant les cas $q = 2k$ et $q = 2k+1$
La matrice $A+B$ est-elle nilpotente ?

c) Expliciter les matrices AB et BA
Calculer les puissances des matrices AB et BA. Ces matrices sont-elles nilpotentes ?

d) L'ensemble $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$?
$\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$ est-il stable par produit ?

II) Un autre exemple

2°) On pose $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calculer $tr(C)$, $det(C)$ et $rang(C)$

b) Montrer que C est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.

c) Déterminer une base de $ker(C)$

On pose $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = Ce_3$ et $e_1 = Ce_2$

On note P la matrice de la famille $B' = (e_1, e_2, e_3)$ dans la base canonique $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

d) Déterminer P et montrer que $B' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ $\big($on identifie $\mathbb{R}^3$ et $M_{3,1}(\mathbb{R})\big)$

e) Déterminer la matrice $T = P^{-1}CP$

III) Une forme réduite des matrices nilpotentes

3°) *(Une propriété de l'indice de nilpotence)*

On considère dans cette question un endomorphisme nilpotent f d'indice p de $\mathbb{R}^n$, de sorte qu'il existe un vecteur non nul e_1 de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^{p-1}(e_1) \neq 0$ et que $f^p = 0$

a) Montrer que la famille $\big(f^{p-1}(e_1), f^{p-2}(e_1), \ldots, f(e_1), e_1\big)$ est libre, puis que $p \leq n$
(On composera une combinaison linéaire nulle de cette famille par f, f^2, ..., f^{p-1})

b) En déduire qu'un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$ est nilpotent si et seulement si $g^n = 0$

4°) *(Construction d'une base adaptée à un endomorphisme nilpotent : cas où n=3)*

On considère dans cette question un endomorphisme nilpotent non nul f d'indice p de $\mathbb{R}^3$
D'après la question 3, l'indice de nilpotence p de f est alors égal à 2 ou 3.

a) On suppose ici f nilpotent d'indice $p = 3$, et on note e_1 un vecteur tel que $f^2(e_1) \neq 0$
Montrer que la famille $(f^2(e_1), f(e_1), e_1)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans cette base.

b) On suppose ici f nilpotent d'indice $p = 2$, et on note e_1 un vecteur tel que $f(e_1) \neq 0$
b)i) Montrer que : $Im(f) \subset ker(f)$
b)ii) A l'aide du théorème du rang, montrer que : $dim(Im(f)) = 1$ et $dim(ker(f)) = 2$
b)iii) Justifier l'existence d'un vecteur e_3 complétant $(f(e_1))$ en une base de $ker(f)$, puis démontrer que la famille $(f(e_1), e_1, e_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$
b)iv) Ecrire la matrice de f dans cette base.

5°) *(Construction d'une base adaptée à un endomorphisme nilpotent : cas général)*

On considère dans cette question un endomorphisme nilpotent f d'indice p de $\mathbb{R}^n$, et on note e_1 un vecteur tel que : $f^{p-1}(e_1) \neq 0$

a) Pour $1 \leq k \leq p$, prouver l'inclusion $ker(f^{k-1}) \subset ker(f^k)$
Montrer que cette inclusion est stricte en considérant le vecteur $f^{p-k}(e_1)$

b) Montrer que l'image par f du sous-espace $ker(f^k)$ est incluse dans $ker(f^{k-1})$

c) On considère une base B_1 de $ker(f)$. Justifier l'existence d'une famille B_2 complétant B_1 en une base de $ker(f^2)$ puis plus généralement, pour tout entier naturel k tel que $2 \leq k \leq p$ justifier l'existence d'une famille B_k complétant une base $B_1 \cup B_2 \cup \dots B_{k-1}$ de $ker(f^{k-1})$ en base de $ker(f^k)$
Ainsi, $B_f = B_1 \cup B_2 \cup \dots B_{p-1} \cup B_p$ forme une base de $ker(f^p) = \mathbb{R}^n$

d) Ecrire par blocs la matrice de f dans la base B_f (on précisera avec soin les blocs qui sont nuls, sans chercher à expliciter les autres).
Quelle est la forme de la matrice obtenue, et que valent ses éléments diagonaux ?

6°) *(Etude de la réciproque du résultat précédent)*

On considère une matrice triangulaire $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $j \leq i \Rightarrow t_{i,j} = 0$

Expliquer très rapidement pourquoi T^n est nulle.

IV) Dimension maximale d'un sous-espace de $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$

7°) *(Matrices symétriques réelles et matrices nilpotentes)*

a) Soit une matrice M appartenant au sous-espace $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles.
On admet l'existence d'une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = D$ soit diagonale.
En déduire que si de plus M est nilpotente, alors M est nulle.

b) Soit $\mathscr{N}$ un sous-espace vectoriel constitué de matrices nilpotentes.

Montrer que la somme $S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{N}$ est directe, et en déduire que $dim(\mathscr{N}) \leq \frac{n(n-1)}{2}$

c) Exhiber un sous-espace $\mathscr{N}$ de matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$

V) Caractérisation de $Vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R}))$ à l'aide de la trace

8°) *(Trace d'une matrice nilpotente)*

a) Montrer que l'application $M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto tr(M)$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$
En déduire la dimension du noyau $ker(tr)$ de l'application trace.

b) Démontrer l'inclusion $\mathscr{N}_n(\mathbb{R}) \subset ker(tr)$ puis l'inclusion $Vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R})) \subset ker(tr)$

9°) *(Etude de l'inclusion réciproque : cas où n=2)*

On considère les matrices suivantes de $M_2(\mathbb{R})$: $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Lesquelles de ces trois matrices sont nilpotentes ?

b) On considère une matrice $(2,2)$ de trace nulle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$
Montrer que M est combinaison linéaire des trois matrices N, E_{12} et E_{21}

c) En déduire dans le cas $n = 2$ l'égalité : $Vect(\mathscr{N}_2(\mathbb{R})) = ker(tr)$

10°) *(Etude de l'inclusion réciproque : cas général)*

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on désigne par $E_{i,j}$ la matrice de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui en position (i,j) qui est égal à 1
Pour $2 \leq i \leq n$, on désigne par N_i la matrice définie par $N_i = E_{1,1} - E_{1,i} + E_{i,1} - E_{i,i}$

a) Calculer $E_{i,j}^2$ pour $i \neq j$ et N_i^2 pour $i \in [\![2,n]\!]$

b) On considère la famille F_n composée des $n^2 - n$ matrices $E_{i,j}$ pour $\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j \end{cases}$ et des $n-1$ matrices N_i (pour $2 \leq i \leq n$)

Montrer que la famille F_n est libre et en déduire une minoration de la dimension de $vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R}))$

c) Justifier l'égalité $vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R})) = ker(tr)$

d) Démontrer que F_n est une base du sous-espace $vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R})) = ker(tr)$, et étant donnée une matrice $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle, exprimer M comme combinaison linéaire des matrices nilpotentes de la famille F_n en explicitant tous les coefficients.