Devoir surveillé de Mathématiques n°3 : TYPE 0

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition
• Dessiner un chat en dessous du mot **FIN**.
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, **encadrer les résultats**.
• Utiliser uniquement des feuilles doubles et les numérotées en bas à droite de la manière suivante : (feuille n°X)/(nombre totale de feuilles)
• Mettre son nom et son prénom en haut à gauche de chaque feuille double

---

QUESTIONS DE COURS

1°) Soit E et F deux K espaces vectoriels de dimension finie et non nulle.
On note $n = dim(E)$ et $p = dim(F)$.
Soit B, B' deux bases de E, soit C, C' deux bases de F, soit $f \in L(E, F)$.
On note $M_{B,C}(f)$ la matrice de f relativement aux bases B et C.
On note $M_{B',C'}(f)$ la matrice de f relativement aux bases B' et C'.
On note $P_B^{B'}$ la matrice de passage de la base B à la base B'.
On note $P_C^{C'}$ la matrice de passage de la base C à la base C'.

a) Quels sont les formats des matrices $M_{B,C}(f)$, $M_{B',C'}(f)$, $P_B^{B'}$ et $P_C^{C'}$?
b) Enoncer la formule de changement de base reliant $M_{B,C}(f)$ et $M_{B',C'}(f)$.

2°) Enoncer tous les résultats sur les intégrales généralisées de références.

3°) Donner la définition d'un hyperplan.

4°) Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x) = (e^{x^2} - 1)(\frac{1}{ln(1+x)} - \frac{1}{x})$

EXERCICE 1

On considère E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $E = M_{3,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à trois coordonnées réelles. (E est identifiable à $\mathbb{R}^3$)

On note $B = (i, j, k)$ la base canonique de E, autrement dit, on a : $i = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $k = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

On considère f, l'endomorphisme de E vérifiant $\begin{cases} f(i) = i - j + k \\ f(j) = 2j - k \\ f(i+j+k) = 2i + 2j + 2k \end{cases}$

1°) a) Déterminer A la matrice de f relativement à B.
1°) b) Calculer la trace et le déterminant de f.

On pose $u = i + j + k$, $v = i + 2k$, $w = i + j$ et $B' = (u, v, w)$

2°) a) Montrer que : B' est une base de E.
2°) b) Déterminer P la matrice de passage de B à B'

3°) a) Montrer que : $f(v) = 2v + u$
3°) b) Calculer $f(u)$ et $f(w)$ en fonction de u et w.
3°) c) Déterminer T la matrice de f relativement à B'
3°) d) Déterminer une relation entre A, P et T.

4°) a) Donner, avec preuve, l'expression de T^n pour $n \in \mathbb{N}$
4°) b) Calculer $tr(A^n)$ et $det(A^n)$

5°) On pose $H = Vect(u, v)$ et $D = Vect(w)$
5°) a) Donner une équation cartésienne de H.
5°) b) Montrer que $E = H \oplus D$

EXERCICE 2

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2}I_n$, vérifiant la relation : $2M^2 = 3M - I_n$

1. On note $F = Vect(I_n, M)$. Prouver que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$
   Déterminer la dimension de F et en donner une base.

2. Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

3. Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2}I_n$
   Justifier que $\mathcal{B} = (A, B)$ constitue une base de F.
   Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathcal{B}$.

4. Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.

Problème : **Une famille de polynômes orthogonaux : polynômes de Tchebychev**

On pose $E = C^0([-1;1])$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur $[-1;1]$.

A) Convergence d'intégrales

Soit h une fonction de E. On étudie dans ce A) l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$

1°) a)Montrer que $J = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente et calculer J.
1°) b) Montrer que h est bornée sur $[-1;1]$
1°) c) Montrer que I est convergente.

2°) a) Rappeler la définition de la fonction *Arccos* en précisant le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée.
2°) b) Expliquer pourquoi on peut appliquer le changement de variable $\theta = arccos(t)$ dans I.
2°) c) Montrer alors que $I = \int_0^{\pi} h(cos(\theta))d\theta$

B) Structure préhilbertienne sur E

Grâce au A) on sait que l'on peut poser : $\forall (f,g) \in E^2$, $< f,g >= \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\pi} f(cos(\theta))g(cos(\theta))d\theta$

3°) Montrer que l'on définit alors un produit scalaire sur E

Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose P_k la fonction de E définie par $\forall t \in [0;1]$, $P_k(t) = t^k$
On pourra identifier P_k et le polynôme X^k
On pose $\forall k \in \mathbb{N}$, $F_k = Vect(P_0, P_1, .., P_k) = Vect(1, X, .., X^k) = \mathbb{R}_k[X]$

4°) Montrer que $(P_0, P_1) = (1, X)$ est une base orthogonale de F_1

On appelle $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5°) Déterminer Q_0 et Q_1.

C) Une famille de Polynômes (Polynômes de Tchebychev)

On définit la famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$

6°) Calculer T_2 et T_3

7°) On rappelle que : $\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$, $cos(p) + cos(q) = 2cos(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2})$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in \mathbb{R}\ \ T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$

8°) a) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \neq q$. Calculer $< T_p, T_q >$

8°) b) Montrer que $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthogonale de F_n

D) Lien entre $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$

9°) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P \in F_{n-1}$ on a : $< T_n, P >= 0$

9°) b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha_n \in \mathbb{R}$, $T_n = \alpha_n Q_n$

9°) c) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de α_n.
En déduire Q_2 et Q_3.

E) Une projection

Dans ce E), on pose $\forall t \in [-1;1]\ \ \varphi(t) = \sqrt{1-t^2}$, on a donc $\varphi \in E$ et on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

10°) Tracer (et reconnaître) la représentation graphique de φ

Pour les questions suivantes, on n'effectuera pas les calculs, mais on donnera les formules littérales.

11°) Exprimer P_φ la projection orthogonale de φ sur F_n à l'aide des Q_n et de φ.

12°) Exprimer la distance de φ à F_n à l'aide des Q_n et de φ.