**PSI* 2026-2027, Mathématiques DS n°2 : Correction, type 2**

# Problème : d'après concours marocain 2024 MP

1) Soit $x \in E$ et $k \in \mathbb{N}$ alors :

$x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0_E \Rightarrow f(f^k(x)) = f(0_E) \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0_E \Rightarrow x \in N_{k+1}$
On a donc $N_k \subset N_{k+1}$ et on en déduit que : $\boxed{\text{la suite } (N_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est croissante pour l'inclusion.}}$

$x \in I_{k+1} \Rightarrow \exists z \in E\ ,\ x = f^{k+1}(z) \Rightarrow \exists z \in E\ ,\ x = f^k(f(z)) \Rightarrow x \in I_k$
On a donc $I_{k+1} \subset I_k$ et on en déduit que : $\boxed{\text{la suite } (I_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante pour l'inclusion.}}$

2) Si on pose $n_k = dim(N_k)$ alors on a : $\Big(N_k \subset N_{k+1}\Big) \Rightarrow n_k \leq n_{k+1}$

La suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est alors une suite croissante.
Comme de plus cette suite est majorée par $dim(E)$ elle est convergente.
Comme c'est une suite d'entiers, alors elle est constante à partir d'un certain rang.
L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}\ ,\ n_k = n_{k+1}\}$ est donc non vide, comme il est minoré par 0 et que c'est une partie de $\mathbb{N}$ alors on peut poser $q = min\big(\{k \in \mathbb{N}\ ,\ n_k = n_{k+1}\}\big)$

Comme $N_q \subset N_{q+1}$ et que l'on a égalité de la dimension alors : $N_q = N_{q+1}$. $q$ est le plus petit entier vérifiant cela.

On a bien justifier $\boxed{\text{l'existence d'un plus petit entier } q \text{ tel que : } N_q = N_{q+1}}$

3) Par le théoèrme du rang on a :
$$\begin{cases} dim(E) = dim(I_q) + dim(N_q) \\ dim(E) = dim(I_{q+1}) + dim(N_{q+1}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dim(I_q) = dim(E) - dim(N_q) \\ dim(I_{q+1}) = dim(E) - dim(N_{q+1}) \end{cases}$$
Mais $N_q = N_{q+1} \Rightarrow dim(N_q) = dim(N_{q+1}) \Rightarrow dim(I_q) = dim(I_{q+1})$

Comme de plus $I_{q+1} \subset I_q$ alors on en déduit : $\boxed{I_{q+1} = I_q}$

4) Commençons par montrer le résultat suivant : $\forall k \geq q\ ,\ N_k = N_q$

Montrons ce résultat en raisonnant par l'absurde.
Si ce résultat était faux on aurait l'existence d'un $q' > q$ tel que l'inclusion : $N_{q'} \subset N_{q'+1}$ soit stricte.
Donc $\exists z \in N_{q'+1}$ tel que $z \notin N_{q'}$
$z$ vérifierai donc $f^{q'}(z) \neq 0$ et $f^{q'+1}(z) = 0$
ou encore $f^q(f^{q'-q}(z)) \neq 0$ et $f^{q+1}(f^{q'-q}(z)) = 0$ (on a bien $q' - q \geq 0$)
donc que l'inclusion $N_{q+1} \subset N_q$ soit stricte, ce qui contredirait la définition de $q$
On a notre absurdité

Donc : $\forall k \geq q\ ,\ N_k = N_q$

• Revenons à la question posée.
Soit $x \in I_q \cap N_q$
Alors $x \in I_q \Rightarrow \exists y \in E\ ,\ x = f^q(y)$
Mais $x \in N_q \Rightarrow f^q(x) = 0_E \Rightarrow f^q(f^q(y)) = 0_E \Rightarrow f^{2q}(y) = 0_E \Rightarrow y \in N_{2q}$

Comme $2q \geq q$, on a par le résultat du début de question $N_{2q} = N_q$ et donc $y \in N_q$ ce qui donne $f^q(y) = x = 0_E$

On en déduit : $I_q \cap N_q = \{0_E\}$ et donc $I_q + N_q = I_q \oplus N_q$

On a : $I_q \oplus N_q \subset E$ et $dim(I_q \oplus N_q) = dim(I_q) + dim(N_q) = dim(E)$ (par le théorème du rang).

Donc : $\boxed{E = I_q \oplus N_q}$

5) a) Appliquons le théorème du rang à $\varphi_k$ : $dim(I_k) = dim(ker(\varphi_k)) + dim(Im(\varphi_k))$

Mais : $x \in ker(\varphi_k)$
$\Leftrightarrow x \in I_k$ et $\varphi_k(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in I_k$ et $f(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in I_k$ et $x \in ker(f) \Leftrightarrow x \in I_k \cap ker(f)$
Donc : $ker(\varphi_k) = I_k \cap ker(f)$

$x \in Im(\varphi_k) \Leftrightarrow \exists y \in I_k\ ,\ f(y) = x \Leftrightarrow \exists z \in E\ ,\ y = f^k(z)$ et $x = f(y) = f^{k+1}(z) \Leftrightarrow x \in I_{k+1}$

Reporter dans le théorème du rang ci-dessus on a : $dim(I_k) = dim(ker(f) \cap I_k) + dim(I_{k+1})$

On a donc : $\boxed{dim(I_k) - dim(I_{k+1}) = dim(Ker(f) \cap I_k)}$

5) b) En reprenant la relation du a) et en utilisant le théorème du rang :
$\Big(dim(E) - dim(N_k)\Big) - \Big(dim(E) - dim(N_{k+1})\Big) = dim(Ker(f) \cap I_k)$
$\Rightarrow dim(N_{k+1}) - dim(N_k) = dim(Ker(f) \cap I_k) \geq 0$

Donc $\boxed{\text{la suite } \big(dim(N_{k+1}) - dim(N_k)\big)_{k_i n \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

6)a) $x \in Im(v)$
$\Leftrightarrow \exists y \in Im(u^r)\ ,\ x = v(y)$
$\Leftrightarrow \exists y \in Im(u^r)\ ,\ x = u^s(y)$
$\Leftrightarrow \exists z \in E\ ,\ y = u^r(z)$ et $x = u^s(y)$
$\Leftrightarrow \exists z \in E\ ,\ y = u^r(z)$ et $x = u^{s+r}(z)$
$\Leftrightarrow x \in Im(u^{s+r})$

On a donc : $\boxed{Im(v) = Im(u^{s+r})}$

6)b) $x \in ker(v) \Rightarrow x \in Im(u^r)\ ,\ v(x) = 0_E \Rightarrow x \in Im(u^r)\ ,\ u^s(x) = 0_E \Rightarrow x \in ker(u^s)$

On a donc : $\boxed{ker(v) \subset ker(u^s)}$

6)c) D'après a) et b) : $\begin{cases} Im(v) = Im(u^{s+r}) \\ ker(v) \subset ker(u^s) \end{cases}$

En passant aux dimensions $\begin{cases} dim(Im(v)) = dim(Im(u^{s+r})) \\ dim(ker(v)) \leq dim(ker(u^s)) \end{cases}$

En ajoutant ces deux inégalités (l'égalité est aussi une inégalité) :

$\underbrace{dim(Im(v)) + dim(Ker(v))}_{dim(Im(u^r))} \leq dim(ker(u^s) + dim(Im(u^{s+r}))$

Une première application du théorème du rang appliquer à $v \in L(Im(u^r))$ donne :
$dim(Im(u^r)) \leq dim(ker(u^s) + dim(Im(u^{s+r}))$

On applique encore deux fois le théorème du rang pour des endomorphismes de $E$ :
$dim(E) - ker(u^r) \leq dim(ker(u^s) + dim(E) - dim(ker(u^{s+r}))$

On obtient donc : $\boxed{dim(ker(u^{s+r})) \leq dim(ker(u^s)) + dim(ker(u^r))}$

6)d) Montrons par récurrence que : $\forall i \in \mathbb{N}\ ,\ dim(ker(u^i)) \leq i$

Au rang 0 : $u^0 = Id_E$ donc $ker(u^0) = \{0_E\}$ et $dim(ker(u^0)) = 0 \leq 0$

Supposons que $dim(ker(u^i)) \leq i$
Alors avec le 6)c) et $s = i$, $r = 1$ : $dim(ker(u^{i+1})) \leq dim(ker(u^i)) + dim(ker(u))$
Par hypothèse de récurrence : $dim(ker(u^{i+1})) \leq i + dim(ker(u))$
Mais, comme $rg(u) = rg(U) = n - 1$ alors par le thorème du rang : $dim(ker(u)) = 1$
On a bien $dim(ker(u^{i+1})) \leq i + 1$

Conclusion : $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}\ ,\ dim(ker(u^i)) \leq i}$

7)a) Montrons par une récurrence finie descendante que : $\forall i \in [\![1, n]\!]\ ,\ dim(ker(u)) = i$

Initialisation au rang $i = n$

Comme $U^n = 0$ alors $u^n = 0$ donc $ker(u^n) = E$ et $dim(ker(u^n)) = n$ ce qui montre l'hypothèse de récurrence au rang $n$.

Hérédité (descendante) : Soit $i \geq 2$, on suppose que $dim(ker(u^i)) = i$ et on veut démontrer que $dim(ker(u^{i-1})) = i - 1$

Avec le 6)c) : $dim(ker(u^i)) = dim(ker(u^{i-1})) + dim(ker(u))$

On a déjà vu que $dim(ker(u)) = 1$ donc $dim(ker(u^i)) = dim(ker(u^{i-1})) + 1$
Comme par hypothèse de récurrence $dim(ker(u^i)) = i$ alors :
$i \leq dim(ker(u^{i-1})) + 1 \Rightarrow i - 1 \leq dim(ker(u^{i-1}))$
D'après le 6)d) $dim(ker(u^{i-1})) \leq i - 1$, on en déduit donc que : $dim(ker(u^{i-1})) = i - 1$

Conclusion : on a montré que : $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!]\ ,\ dim(ker(u^i)) = i}$

7)b) Notons $p$ l'indice de nilpotence de $u$.
$u^n = 0$ permet d'affirmer que $p \leq n$

Mais $u^p = 0 \Rightarrow ker(u^p) = E \Rightarrow dim(ker(u^p)) = n$ donc $p \geq n$
Avec l'autre inégalité on a : $p = n$

Bilan : $\boxed{\text{l'indice de nilpotence de } u \text{ est donc } n}$

7)c) Comme $n$ est l'indice de nilpotence de $u$ on a $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$
Donc $\exists e \in E\ ,\ u^{n-1}(e) \neq 0$

Montrer que la famille $(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e))$ est libre dans $E$
Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que : $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e) = 0_E$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$
On peut alors poser $i = Min(\{k \in [\![0; n-1]\!]\ ,\ a_k \neq 0\})$ et on a $\sum_{k=i}^{n-1} a_k u^k(e) = 0_E$
En composant par $u^{n-1-i}$ on a : $\sum_{k=i}^{n-1} a_k u^{k+n-i}(e) = 0_{\mathbb{R}^n}$
Et comme pour $k > i$ on a $u^{k+n-i} = 0_{L(E)}$ alors il reste $a_i u^{n-1}(e) = 0_E \Rightarrow a_i = 0$ puisque $u^{n-1}(e) \neq 0_E$ ce qui contredit la définition de $i$. Absurde.

On a donc $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) = (0, 0, \ldots, 0)$ et on a montrer que la famille $(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e))$ est libre dans $E$. Comme elle est de même cardinale que $E$ alors c'est une base de $E$.

Bilan : $\boxed{\text{Il existe } e \in E \text{ tel que } B_e \text{ est une base de } E.}$

7)d) Directement, la matrice de $u$ dans $B_e$ vaut : $\boxed{M_{B_e}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

8) Soit $A$ et $B$ deux matrices nilpotentes de rang $n-1$
Alors $A$ et $B$ sont semblables à la matrice du 7)d). Par transitivité on a donc $A$ et $B$ semblables.

Bilan : $\boxed{\text{deux matrices nilpotentes de } M_n(\mathbb{C}) \text{ de rang } n-1 \text{ sont semblables.}}$

9)a) Comme $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est génératrice de $E$.
Alors $\forall x \in \mathbb{E}\ ,\ \exists (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p\ ,\ x = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x_0)$

Par linéarité : $f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^p(f^k(x_0)) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{p+k}(x_0) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(\underbrace{f^p(x_0)}_{x_0}) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x_0) = x$

Comme $\forall x \in E\ ,\ f^p(x) = x$ alors on en déduit que : $\boxed{f^p = Id_E}$

9)b) Clairement $x_0 \neq 0_E$ car sinon la famille $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\big)$ ne serait pas génératrice.
Donc $(x_0)$ est libre et $1 \in F_{x_0}$ qui est donc non vide.
Comme de plus $k \in F_{x_0} \Rightarrow k \leq dim(E) = n$ alors $F_{x_0}$ est majorée.

Une partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ admettant un maximum alors : $\boxed{F_{x_0} \text{ admet un plus grand élément } \gamma}$

9)c) Montrons par récurrence sur $k \geq \gamma$ que $f^k(x_0) \in Vect\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\big)$

Initialisation :
Par définition de $\gamma$ on a $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma}(x_0)\big)$ liée.
Comme $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\big)$ est libre on en déduit $f^{\gamma}(x_0) \in Vect\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\big)$

Hérédité : On suppose le résultat vrai au rang $k$, on a alors $f^k(x_0) \in Vect\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\big)$
ou encore $f^k(x_0)$ s'écrit $f^k(x_0) = \sum_{j=0}^{\gamma-1} \zeta_j f^j(x_0)$
On en déduit $f^k(x_0) = \sum_{j=0}^{\gamma-2} \zeta_j f^{j+1}(x_0) + \zeta_{\gamma-1} f^{\gamma}(x_0)$
Mais $f^{\gamma}(x_0) \in Vect\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\big)$ par l'initialisation de la récurrence et clairement
$\sum_{j=0}^{\gamma-2} \zeta_j f^{j+1}(x_0) \in Vect\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\big)$
Par propriété d'espace vectoriel $f^{k+1}(x_0) \in Vect\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\big)$
Conclusion : on a montré par récurrence que : $\boxed{\forall k \geq \gamma \text{ que } f^k(x_0) \in Vect\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\big)}$

9)d) Avec le c) on a $Vect\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\big)$ qui est génératrice de $E$, comme de plus la famille est libre (définition de $\gamma$) alors on a une base de $E$.
Comme c'est une base de $E$ elle a un cardinal de $dim(E) = n$ et donc $\boxed{\gamma = n}$

10)a) $B_{x_0}$ est génératrice de $E$ et contient $dim(E) = n$ éléments. Donc $\boxed{B_{x_0} \text{ est une base de } E.}$

10)b) On a : $\boxed{G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

10)c) Par calcul : $GU_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{nk} \\ \overline{\omega}^{k} \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix}$ Comme $\omega$ est de module 1 on a $\omega\overline{\omega} = 1$ et donc $\omega^k\overline{\omega}^k = 1$

On a donc $GU_k = \omega^k\overline{\omega}^k \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{nk} \\ \overline{\omega}^{k} \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \omega^k \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{(n+1)k} \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \overline{\omega}^{3k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$

et comme $\overline{\omega}^{nk} = 1$ on a $\overline{\omega}^{(n+1)k} = \overline{\omega}^{k}$ et donc $\boxed{GU_k = \omega^k U_k}$ ce qui répond à la question.

11)a) Notons $\delta_{i,j}$ le $(i,j)$ ième coefficient de $M\overline{M}$

Alors, par définition du produit : $\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\overline{m_{k,j}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\omega}^{ik}\omega kj = \sum_{k=1}^{n} \omega^{k(j-i)} = \sum_{k=1}^{n} (\omega^{j-i})^k$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\omega^{j-i}$

Cas 1 : $i \neq j$

donc $\omega^{j-i} \neq 1$ et c'est une racine de l'unité.

Donc $\delta_{i,j} = \omega^{j-i}\frac{1-(\omega^{j-i})^n}{1-\omega^{j-i}} = 0$

Cas 2 : $i = j$

alors $\omega^{j-i} = 1$ et donc $\delta_{i,j} = \delta_{i,i} = n$

On en déduit : $\boxed{M\overline{M} = nI_n}$

11)b) On déduit du a) que $\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{1}{n}\overline{M}}$

12) La matrice $M$ est la matrice de la famille $(U_1, \ldots, U_n)$ dans la base canonique.

Comme c'est une matrice inversible alors $(U_1, \ldots, U_n)$ est une base.

Le 10)c) se traduit alors par $G = MDM^{-1}$ avec $D = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (avec $\alpha_k = \omega^k$)

On remarque que : $B = \sum_{k=0}^{n-1} b_k G^k$

et donc que : $B = \sum_{k=0}^{n-1} b_k MD^kM^{-1} = M\big(\sum_{k=0}^{n-1} b_k D^k\big)M^{-1}$

Donc $\boxed{B = P\Delta P^{-1} \text{ avec } P = M \text{ et } \Delta = diag(R(\alpha_1), \ldots, R(\alpha_n)) \text{ ou } R \text{ est le polynôme } R = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k}$

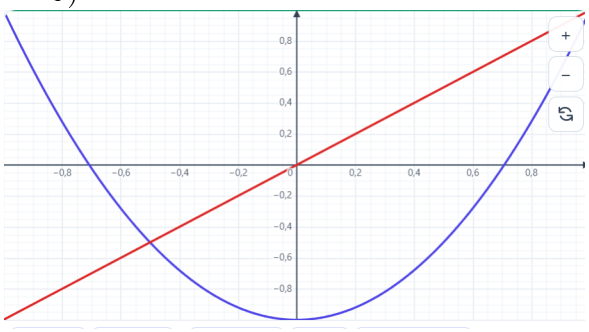
# Problème 2 : d'après e3a PSI 2014

1) *arccos* est continue sur $[-1,1]$ et *cos* est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition
la fonction $c_n$ est continue sur $[-1,1]$

2) • $c_0(x) = cos(0) = 1$
• $c_1(x) = cos(arccos(x)) = x$ car *arccos* est la bijection réciproque de la restriction de *cos* à $[0,\pi]$
• $c_2(x) = cos(2arccos(x)) = 2cos^2(arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$
• $c_2(x) = cos(2arccos(x)) = 2cos^2(arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$

Bilan : $c_0(x) = 1$, $c_1(x) = x$ et $c_2(x) = 2x^2 - 1$

3)



4) Posons $x \in [-1,1]$. On pose : $\theta = arccos(x)$

Alors : $\begin{cases} c_{n-1}(x) = cos((n-1)\theta) = cos(n\theta - \theta) = cos(n\theta)cos(\theta) + sin(n\theta)sin(\theta) \\ c_{n+1}(x) = cos((n+1)\theta) = cos(n\theta + \theta) = cos(n\theta)cos(\theta) - sin(n\theta)sin(\theta) \end{cases}$
En additionnant les deux égalités : $c_{n-1}(x) + c_{n+1}(x) = 2cos(n\theta)cos(\theta) = 2xc_n(x)$

On a donc : $\forall x \in [-1,1]\ ,\ c_{n-1}(x) + c_{n+1}(x) = 2xc_n(x)$

5) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $T_n$ est de degré $n$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ le coefficient dominant de $T_n$ est $2^{n-1}$

Initialisation :
On a bien $T_0 = 1$ de degré 0, $T_1 = X$ de degré 1 et $T_1$ a pour coefficient dominant $1 = 2^{1-1}$

Hérédité :
On suppose que $T_n$ est de degré $n$, que $T_{n-1}$ est de degré $n-1$ et que le coefficient dominant de $T_n$ est $2^{n-1}$
Alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} = 2X(2^nX^n + \underbrace{Q}_{deg \leq n-1}) - \underbrace{T_{n-1}}_{deg=n-1} = 2^{n+1}X^{n+1} + \text{poly de deg} \leq n$

On a donc $deg(T_{n+1}) = n+1$ et son coefficient dominant vaut $2^n = 2^{n+1-1}$

Conclusion :
$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ deg(T_n) = n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ le coefficient dominant de $T_n$ vaut $2^{n-1}$. Celui de $T_0$ vaut 1.

6) $(T_0, \ldots, T_n)$ est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degré, d'après le cours c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

7) On a $\forall x \in [-1,1],\ c_0(x) = T_0(x)$ et $c_1(x) = T_1(x)$.
De plus $(c_n)$ et $(T_n)$ vérifient la même relation de récurrence donc : $\boxed{\forall x \in [-1,1]\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ c_n(x) = T_n(x)}$

8) • Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$. Commençons par montrer que $I = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est convergente.

Effectuons le changement de variable $C^1$ bijectif $\theta = arccos(t)$ (et donc $d\theta = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$) dans $I$, alors $I$ est de même nature que : $I' = \int_{\pi}^{0} P(cos(\theta))Q(cos(\theta))(-d\theta) = \int_{0}^{\pi} P(cos(\theta))Q(cos(\theta))d\theta$
Mais $I'$ est clairement convergente comme intégrale d'une fonction continue sur un segment et donc $I$ est convergente.

On peut donc bien définir $(P|Q)$

• Soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Alors par linéarité de l'intégrale on a : $(P, Q+\lambda R) = (P|Q) + \lambda(P|R)$
Par commutativité du produit : $(P|Q) = (Q|P)$
$(P,P) = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}}_{\geq 0} dt$ donc $(P|P) \geq 0$ par positivité de l'intégrale.
Enfin $(P,P) = 0$
$\Rightarrow \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0$
$\Rightarrow \forall t \in ]-1,1[, \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ par le théorème de l'intégrale généralisée nulle puisque $t \mapsto \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue

et positive sur $[-1,1]$

$\Rightarrow \forall t \in ]-1,1[, P(t) = 0$
$\Rightarrow P = 0$ car $P$ est un polynôme qui a une infinité de racines.

On a donc : $\forall (P,Q,R,) \in \mathbb{R}[X]^3\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \begin{cases} (P, Q+\lambda R) = (P|Q) + \lambda(P|R) \\ (P|Q) = (Q|P) \\ (P|P) \geq 0 \\ (P|P) = 0 \Rightarrow P = 0 \end{cases}$

donc $\boxed{(|) \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$

9) Par formule de trigonométrie :
$I_{p,q} = \frac{1}{2}\Big( \int_0^{\pi} \big(cos((p+q)\theta) + cos((p-q)\theta)\big)d\theta \Big) = \frac{1}{2}\big(A_{p+q} + A_{p-q}\big)$ où l'on a posé $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ A_k = \int_0^{\pi} cos(k\theta)d\theta$

On remarque que si $k \neq 0\ ,\ A_k = [\frac{sin(k\theta)}{k}]_0^{\pi} = 0$ et $A_0 = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$

Donc si $p \neq q$ alors $p - q \neq 0$ donc $A_{p-q} = 0$ et $p + q > 0$ (puisque $p$ et $q$ ne sont pas tout les deux nuls) donc $A_{p+q} = 0$
Donc $p \neq q \Rightarrow I_{p,q} = 0$

Si $p = q = 0$ alors $I_{p,q} = I_{0,0} = \frac{1}{2}(A_0 + A_0) = \pi$
Si $p = q > 0$ alors $I_{p,q} = \frac{1}{2}(A_{2p} + A_0) = \frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$

Bilan : $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}\ ,\ I_{p,q} = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq q \\ \pi \text{ si } p = q = 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } p = q > 0 \end{cases}}$

10)a) On sait déjà que $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ par la question 6
De plus $< T_p, T_q >= \int_0^\pi c_p(\theta) c_q(\theta) d\theta$ en effectuant le même changement de variable qu'au 8) et en remarquant que : $T(cos(\theta)) = c_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$
Donc $(T_p|T_q) = I_{p,q}$ et vaut donc 0 si $p \neq q$ ce qui donne que $(T_0, \dots, T_n)$ est orthogonale.

Finalement : $\boxed{(T_0, \dots, T_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]}$

$\boxed{\text{Cette base n'est pas orthonormée}}$ car $(T_0, T_0) = I_{0,0} = \pi \neq 1$

10)b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors comme $(T_0, \dots, T_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on peut écrire : $P = \sum_{k=0}^{n-1} p_k T_k$
Donc $(P|T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k \underbrace{(T_k|T_n)}_{=0} = 0$ car les $T_i$ sont orthogonaux deux à deux.
Donc $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\ ,\ (P|T_n) = 0$ et donc $\boxed{T_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X]}$

10)c) On sait, d'après la question 5) que $T_n = 2^{n-1}X^n + Q_n$ avec $deg(Q_n) \leq n-1$
Donc $(T_n|T_n) = (T_n|2^{n-1}X^n + Q_n) = 2^{n-1}(T_n|X^n) + (T_n|Q_n)$
Mais $(T_n, Q_n) = 0$ par la question 1.4) puisque $deg(Q_n) < n$ donc $(T_n|T_n) = 2^{n-1}(T_n, X^n)$ et enfin, comme $(T_n|T_n) = ||T_n||^2$ : $\boxed{(X^n|T_n) = \frac{||T_n||^2}{2^{n-1}}}$

11)a) En écrivant $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base $(T_0, \dots, T_n)$ on a :
$\boxed{\text{l'existence de } (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que : } P = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k}$

11)b) $(P|T_n) = (\sum_{k=0}^{n} b_k T_k|T_n) = \sum_{k=0}^{n} b_k (T_k|T_n) = b_n (T_n|T_n) \underbrace{=}_{9)} b_n \frac{\pi}{2}$
D'autre part $(P|T_n) = (X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k|T_n) = (X^n|T_n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \underbrace{(X^k|T_n)}_{=0} = (X^n|T_n) \underbrace{=}_{10)c)} \frac{||T_n||^2}{2^{n-1}}$
Donc $b_n(T_n|T_n) = \frac{||T_n||^2}{2^{n-1}}$ et donc $\boxed{b_n = \frac{1}{2^{n-1}}}$

11)c) Comme $(T_0, \dots, T_n)$ est une base orthogonale alors : $||P||^2 = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{b_k^2 ||T_k||^2}_{\geq 0}$
Donc $||P||^2 \geq b_n ||T_n||^2$ et comme $||T_n||^2 = I_{n,n} = \frac{\pi}{2}$ alors : $\boxed{||P||^2 \geq b_n^2 \frac{\pi}{2}}$

11)d) L'inf recherché existe, car c'est la borne inférieure d'une partie non vide, minorée de $\mathbb{R}$ (par le 2.3)
On remarque que : $\int_{-1}^{1} \frac{\left(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0^2\right)^2}{\sqrt{1-t^2}} = ||P||^2$

Notons $K$ cet inf, alors d'après le 11)c) $K \geq b_n^2 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$

Si on choisit les $a_k$ pour avoir $P = \frac{T_n}{2^{n-1}}$ (coefficient dominant $X^n$) alors $||P||^2 = (\frac{1}{2^{n-1}})\,||T_n||^2 = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$

On a donc $\boxed{\inf_{(a_0,a,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \left( \int_{-1}^{1} \frac{\left(t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_0^2\right)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) = \frac{\pi}{2^{2n-1}}}$

# partie III

12) $T_n(x_k) = T_n(cos(\frac{(2k-1)\pi}{2n}))$ mais $T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$ donc $T_n(x_k) = cos((2k-1)\frac{\pi}{2}) = 0$
De plus les $x_k$ sont distincts car $cos$ est injective sur $[0,\pi]$ et $T_n$ admet au plus $n$ racines car $T_n$ est de degré $n$.

Bilan : $\boxed{\text{les } x_k \text{ pour } k \in [\![1,n]\!] \text{ sont bien les racines de } T_n}$

13) Comme $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que $G \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors on peut écrite $G$ dans cette base, et par propriété des polynômes de Lagrange on a : $G = \sum_{i=1}^{n} G(x_i)L_i$

Alors $\int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^{1} \frac{\sum_{i=1}^{n} G(x_i)L_i(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{i=1}^{n} G(x_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{L_i(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}_{\lambda_i}$

ceci par linéarité de l'intégrale, car la somme est finie et les intégrales sont convergentes.

On a donc bien $\boxed{\forall G \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(x_i) \ \text{ avec } \ \forall j \in [|1,n|],\ \lambda_j = \int_{-1}^{1} \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt}$

14)a) La division euclidienne de $R$ par $T_n$ (qui est de degré $n$) s'écrit de manière unique $R = ST_n + U$ avec $deg(U) < \deg(T_n) = n$ On a donc $U \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$
Comme $deg(ST_n) = deg(S) + deg(T_n) = n + deg(S) \leq deg(R)$ alors $deg(S) \leq n-1$ et donc $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

Bilan : on a démontré $\boxed{\text{l'existence et l'unicité deux polynômes } S \text{ et } U \text{ de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tels que } R = ST_n + U}$

14)b) $\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$
$= (R|1)$
$= (ST_n + U|1)$
$= (ST_n|1) + (U|1)$
$= (T_n|S) + (U|1)$
$= (U|1)$ car $(T_n|S) = 0$ puisque $deg(S) \leq n-1$ et $T_n$ orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

Comme $U \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors on peut appliquer le 13) et on a : $(U|1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i)$

Mais comme $T(x_i) = 0$ alors $U(x_i) = R(x_i)$ et donc $\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i)}$

15)a) $T_n(x) = cos(narccos(x))$ qui est dérivable et $T_n'(x) = \frac{nsin(narccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$

Mais $sin(narccos(x_k)) = sin(n\theta_k) = sin(\frac{(2k-1)\pi}{2}) = (-1)^{k+1}$
et $\sqrt{1-x_k^2} = \sqrt{1-cos(\theta)^2} = \sqrt{sin(\theta)^2} = sin(\theta)$ car $\theta \in [0,\pi]$ donc $sin(\theta_k) \geq 0$

Bilan : $\boxed{T_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1}n}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1}n}{\sin(\theta_k)}}$

15)b) Avec l'expression du 15)a) $T_n'(x_k) \neq 0$ et donc $\psi_k$ est bien définie.

$T_n$ est de degré $n$, de coefficient dominant $2^{n-1}$ et on connaît ses racines, on peut donc écrire $T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$

On a donc, pour $k \neq x_k$ : $\psi_k(x) = \frac{T_n(x)}{(x-x_k)T_n'(x_k)} = \frac{2^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)}{(x-x_k)T_n'(x_k)} = \frac{2^{n-1}}{T_n'(x_k)}\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(X-x_i)$

donc $\psi_k$ est égale à un polynôme sur $\mathbb{R}\backslash\{x_k\}$

Mais $\lim\limits_{x\to x_k}\psi_k(x)$
$= \lim\limits_{x\to x_k}\frac{1}{T_n'(x_k)}\frac{T_n(x)}{x-x_k}$
$= \frac{1}{T_n'(x_k)}\lim\limits_{x\to x_k}\frac{T_n(x)-T_n(x_k)}{x-x_k}$ puisque $T_n(x_k) = 0$
$= \frac{1}{T_n'(x_k)}T_n'(x_k)$ car on reconnaît un taux d'accroissement
$= 1 = \psi_k(x_k)$

Donc $\psi_k$ est continue en $x_k$ et donc sur $\mathbb{R}$ et donc $\psi_k$ est un polynôme.

On remarque alors que $\psi_k$ est un polynôme de degré $n-1$, qui vaut 1 en $x_k$ et 0 sur les autres $x_i$, c'est donc bien le $k$-ième polynôme de Lagrange de la famille $(x_1,\ldots,x_n)$

On a donc $\psi_k = L_k$ et donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \psi_k(x) = L_k(x)}$

15)c) • $\frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)} = \frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\theta-\theta_k}\frac{\theta-\theta_k}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)}$
On peut passer à la limite en remarquant que l'on a fait apparâitre deux taux d'accroissements.

On a donc $\lim\limits_{\theta\to\theta_k}\frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)} = \frac{cos'(j\theta_k)}{sin'(j\theta_k)} = \frac{-jsin(j\theta_k)}{cos(j\theta_k)} = -jtan((j\theta_k)$

On a donc $\boxed{\lim\limits_{\theta\to\theta_k}\frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)} = -jtan((j\theta_k)}$

• L'application $\theta \mapsto \frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)}$ est donc continue sur $[0,\pi]$ puisque $cos(\theta)-cos(\theta_k) \neq 0$ si $\theta \neq \theta_k$ et que par la limite ci-dessus la fonction est prolongeable par continuité en $\theta_k$

$\boxed{\text{L'intégrale } u_j \text{ est donc convergente}}$ comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

• Comme $L_k = \psi_k$ alors $\lambda_k = \int_{-1}^{1}\frac{\frac{T_n(x)}{(x-x_k)T_n'(x_k)}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Changement de variable $C^1$ bijectif $x = cos(\theta) \Leftrightarrow \theta = arccos(x)$ (donc $\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\theta$)

$\lambda_k = \frac{1}{T_n'(x_k)}\int_0^{\pi}\frac{T_n(cos(\theta))}{cos(\theta)-x_k}d\theta$

Mais $x_k = cos(\theta_k)$ et $cos(n\theta_k) = 0$ et $T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$ donc $\lambda_k = \frac{1}{T_n'(x_k)} \int_0^\pi \frac{cos(n\theta)-cos(n\theta_k)}{\theta-\theta_k} d\theta$

Donc $\lambda_k = \frac{u_n}{T_n'(x_k)}$ et avec le 15)a) : $\boxed{\lambda_k = \frac{(-1)^{k+1}}{n} u_n \sin(\theta_k)}$

15)d) Par linéarité de l'intégrale :
$u_{j+2} - 2u_{j+1}\cos(\theta_k) + u_j$
$= \int_0^\pi \frac{1}{cos(\theta)-cos(\theta_k)} \Delta d\theta$

Avec $\Delta$
$= \big(\cos((j+2)\theta) - \cos((j+2)\theta_k)\big) - 2\cos(\theta_k)\big(\cos((j+1)\theta) - \cos((j+1)\theta_k)\big) + \big(\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)\big)$
$= \big(\cos((j+2)\theta) + \cos(j\theta) - (\cos((j+2)\theta_k + \cos(j\theta_k))\big) - 2\cos(\theta_k)\big(\cos((j+1)\theta) - \cos((j+1)\theta_k)\big)$

On utilise $cos(p) + cos(q) = 2cos(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2})$

$\Delta = 2\big(\cos((j+1)\theta)cos(\theta) - (\cos((j+1)\theta_k)\cos(\theta_k))\big) - 2\cos(\theta_k)\big(\cos((j+1)\theta) - \cos((j+1)\theta_k)\big)$
$= 2\cos((j+1)\theta)(cos(\theta) - \cos(\theta_k))$

On en déduit : $u_{j+2} - 2u_{j+1}\cos(\theta_k) + u_j$
$= \int_0^\pi 2\cos((j+1)\theta) d\theta = [2\frac{sin((j+1)\theta)}{j+1}]_0^\pi = 0$

Donc a donc : $\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ u_{j+2} - 2u_{j+1}\cos(\theta_k) + u_j = 0}$

15)e) $(u_j)$ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants d'équation caractéristique :
$r^2 - 2cos(\theta_k)r + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (r - cos(\theta_k))^2 + 1 - cos^2(\theta_k) = 0$
$\Leftrightarrow (r - cos(\theta_k))^2 = -sin^2(\theta_k) \Leftrightarrow r - cos(\theta_k) = \pm sin(\theta_k) \Leftrightarrow r = e^{i\theta_k}$ ou $r = e^{-i\theta_k}$

Comme $(u_j)$ est à valeurs réelles, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ , $u_j = Acos(j\theta_k) + Bsin(j\theta_k)$

On a directement $u_0 = 0$ et $u_1 = \pi$ donc $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ Acos(\theta_k) + Bsin(\theta_k) = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{\pi}{sin(\theta_k)} \end{cases}$

On a alors : $u_j = \frac{sin(j\theta_k)\pi}{sin(\theta_k)}$

Comme , d'après 15°)c) : $\lambda_k = \frac{(-1)^{k+1}}{n} u_n \sin(\theta_k)$ alors $\lambda_k = \frac{(-1)^{k+1}}{n} \sin(\theta_k) \frac{sin(n\theta_k)\pi}{sin(\theta_k)}$

Mais $sin(n\theta_k) = sin(\frac{(2k-1)\pi}{2}) = (-1)^{k-1}$ et finalement $\boxed{\lambda_k = \frac{\pi}{n}}$

16) Le 14°)b) appliquer avec la valeur trouvée au 15)e) donne :
$\boxed{\forall R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]\ ,\ \int_{-1}^1 \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n R\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)}$