PSI* 2026-2027, Mathématiques DS n°2 : Correction, type 1

Problème 1: d'après e3A PSI 2014

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que T_n est de degré n et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}

Initialisation :
On a bien $T_0 = 1$ de degré 0, $T_1 = X$ de degré 1 et T_1 a pour coefficient dominant $1 = 2^{1-1}$

Hérédité :
On suppose que T_n est de degré n, que T_{n-1} est de degré $n-1$ et que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}
Alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} = 2X(2^n X^n + \underbrace{Q}_{deg \leq n-1} - \underbrace{T_{n-1}}_{deg=n-1} = 2^{n+1}X^{n+1} + \text{poly de deg} \leq n$

On a donc $deg(T_{n+1}) = n+1$ et son coefficient dominant vaut $2^n = 2^{n+1-1}$

Conclusion :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ deg(T_n) = n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ le coefficient dominant de } T_n \text{ vaut } 2^{n-1}. \text{ Celui de } T_0 \text{ vaut 1.}}$

2) $(T_0, \dots, T_n)$ est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degré, d'après le cours c'est une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}_n[X]}$

3) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$

Initialisation au rang 0 et au rang 1 :
Au rang 0 : $T_0(cos(\theta)) = 1 = cos(0) = cos(0.\theta)$
Au rang 1 : $T_1(cos(\theta)) = cos(0) = cos(1.\theta)$
On a donc l'initialisation.

Hérédité : on suppose que $T_n(cos(\theta) = cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(cos(\theta)) = cos((n+1)\theta)$

$T_{n+2}(cos(\theta))$
$= 2cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))$
$= 2cos(\theta)cos((n+1)\theta) - cos(n\theta)$
$= cos((n+1+1)\theta) + cos((n+1-1)\theta) - cos(n\theta)$
$= cos((n+2)\theta)$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)}$

4) Effectuons le changement de variable C^1 bijectif $\theta = arccos(t)$ (et donc $d\theta = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$) dans $(P|Q)$, alors $(P|Q)$ est de même nature que : $I = \int_{\pi}^{0} P(cos(\theta))Q(cos(\theta))(-d\theta) = \int_{0}^{\pi} P(cos(\theta))Q(cos(\theta))d\theta$
Mais I est clairement convergente comme intégrale d'une fonction continue sur un segment et donc $\boxed{(P|Q) \text{ est convergente.}}$

5) • Soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Alors par linéarité de l'intégrale on a : $(P, Q+\lambda R) = (P|Q) + \lambda(P|R)$
Par commutativité du produit : $(P|Q) = (Q|P)$
$(P,P) = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}}_{\geq 0} dt$ donc $(P|P) \geq 0$ par positivité de l'intégrale.
Enfin $(P,P) = 0$
$\Rightarrow \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$
$\Rightarrow \forall t \in]-1,1[, \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ par le théorème de l'intégrale généralisée nulle puisque $t \mapsto \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $[-1,1]$

$\Rightarrow \forall t \in]-1,1[, P(t) = 0$
$\Rightarrow P = 0$ car P est un polynôme qui a une infinité de racines.

On a donc : $\forall (P,Q,R,) \in \mathbb{R}[X]^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} (P, Q+\lambda R) = (P|Q) + \lambda(P|R) \\ (P|Q) = (Q|P) \\ (P|P) \geq 0 \\ (P|P) = 0 \Rightarrow P = 0 \end{cases}$

donc $\boxed{(|) \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$

6) Par formule de trigonométrie :
$I_{p,q} = \frac{1}{2}\Big(\int_0^{\pi} \big(cos((p+q)\theta) + cos((p-q)\theta)\big) d\theta \Big) = \frac{1}{2}\big(A_{p+q} + A_{p-q}\big)$ où l'on a posé $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_k = \int_0^{\pi} cos(k\theta) d\theta$

On remarque que si $k \neq 0$, $A_k = [\frac{sin(k\theta)}{k}]_0^{\pi} = 0$ et $A_0 = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$

Donc si $p \neq q$ alors $p - q \neq 0$ donc $A_{p-q} = 0$ et $p + q > 0$ (puisque p et q ne sont pas tout les deux nuls) donc $A_{p+q} = 0$
Donc $p \neq q \Rightarrow I_{p,q} = 0$

Si $p = q = 0$ alors $I_{p,q} = I_{0,0} = \frac{1}{2}(A_0 + A_0) = \pi$
Si $p = q > 0$ alors $I_{p,q} = \frac{1}{2}(A_{2p} + A_0) = \frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$

Bilan : $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N} \ , \ I_{p,q} = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq q \\ \pi \text{ si } p = q = 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } p = q > 0 \end{cases}}$

7) On sait déjà que $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ par la question 2)
De plus $< T_p, T_q >= \int_0^{\pi} c_p(\theta) c_q(\theta) d\theta$ en effectuant le même changement de variable qu'en 1.1 et en remarquant que : $T(cos(\theta)) = c_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$
Donc $(T_p|T_q) = I_{p,q}$ et vaut donc 0 si $p \neq q$ ce qui donne que $(T_0, \ldots, T_n)$ est orthogonale.

Finalement : $\boxed{(T_0, \ldots, T_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]}$

$\boxed{\text{Cette base n'est pas orthonormée}}$ car $(T_0, T_0) = I_{0,0} = \pi \neq 1$

Problème 2 : d'après concours EPITA 2017

1°) a) On remarque que $A^2 = B^2 = 0$ et donc que : $\boxed{\forall k \geq 2\ ,\ A^k = B^k = 0,\ A^1 = A,\ B^1 = B,\ A^0 = B^0 = I_2}$

1°) b) On remarque que si $k \in \mathbb{N}$: $(A+B)^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A+B)^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les puissances de $A + B$ n'étant jamais nulle $\boxed{A + B \text{ n'est pas nilpotente.}}$

1°) c) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a pour tout $k \geq 1$, $(AB)^k = AB$ et $(BA)^k = BA$
Clairement $\boxed{AB \text{ et } BA \text{ ne sont pas nilpotentes.}}$

1°)d) Si $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$ était un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, $A + B$ serait nilpotente, ce qui n'est pas le cas.
Si $\mathscr{N}_n(\mathbb{R})$ était un stable par produit, AB serait nilpotente, ce qui n'est pas le cas.

$\boxed{\mathscr{N}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } M_n(\mathbb{R}), \text{ et } \mathscr{N}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas stable par produit.}}$

2°) a) $tr(C) = 2 - 1 - 1 = 0$
Par Sarrus : $det(C) = 2 + 1 + 0 - 0 - 0 - 3 = 0$
Clairement les colonnes 2 et 3 sont libres donc $rg(C) \geq 2$ et comme $det(C) = 0$ alors $rg(C) < 3$. On en déduit $rg(C) = 2$

Bilan : $\boxed{tr(C) = 0,\ de(C) = 0,\ rg(C) = 2}$

2°) b) On a $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C^3 = 0$
On en déduit : $\boxed{C \text{ est nilpotente d'indice de nilpotence 2.}}$

2°) c) $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -3x - y - +z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \\ 0 = 0 \end{cases}$

On a donc : $\boxed{ker(C) = vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

2°) d) On a : $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

$det_B(B') = det(P) = 1 \neq 0$ et donc $\boxed{B' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

2°) e) Par la formule de changement de base, T est la matrice dans la base B' de A. Comme : $Ce_3 = e_2$, $Ce_2 = e_1$ et $Ce_1 = 0$ alors : $\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3) a) Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que : $\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(e_1) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$
On peut alors poser $i = Min(\{k \in [\![0; p-1]\!] \ , \ a_k \neq 0\})$ et on a $\sum_{k=i}^{p-1} a_k f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$
En composant par f^{p-1-i} on a : $\sum_{k=i}^{p-1} a_k f^{k+p-i}(e_1) = 0_{\mathbb{R}^n}$
Et comme pour $k > i$ on a $f^{k+p-i} = 0_{L(E)}$ alors il reste $a_i f^{p-1}(e_1) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow a_i = 0$ puisque $f^{p-1}(e_1) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ ce qui contredit la définition de i. Absurde.

On a donc $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) = (0, 0, \ldots, 0)$ et on a montrer que :
$\boxed{\text{la famille } (f^{p-1}(x), f^{p-2}(x), \ldots, f(e_1), e_1) \text{ est libre dans } \mathbb{R}^n}$

3°) b) • Première implication :
Si $g^n = 0$ alors g est nilpotent de manière directe.
• Réciproque
Supposons que g soit nilpotente d'indice de nilpotence p.
Alors avec le 3°)a) comme une famille libre de $\mathbb{R}^n$ est de cardinal plus petit que n on a : $p \leq n$
Donc $g^n = g^p \circ g^{n-p} = 0 \circ g^{n-p} = 0$ (possible car $n - p \geq 0$) et donc $g^n = 0$

Bilan : $\boxed{g \text{ endomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ est nilpotent si et seulement si } g^n = 0}$

4°) a) La famille $(f^2(e_1), f(e_1), e_1)$ est libre d'après le 3°) a), comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$: $\boxed{(f^2(e_1), f(e_1), e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

La matrice de f relativement à cette base est : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

4°)b)i) Soit $x \in \mathbb{R}^n$
$x \in Im(f)$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ x = f(y)$ on compose par f
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^3 \ , \ f(x) = f^2(y)$ on a $f^2 = 0$
$\Rightarrow f(x) = 0$
$\Rightarrow x \in ker(f)$

On a donc : $\boxed{Im(f) \subset ker(f)}$

4°)b)ii) D'après le a) : $dim(Im(f)) \leq dim(ker(f)$
En ajoutant $dim(ker(f))$ on a : $dim(Im(f)) + dim(ker(f)) \leq dim(ker(f)) + dim(ker(f))$
Et avec le théorème du rang : $3 \leq 2dim(ker(f)) \Rightarrow 1.5 \leq dim(ker(f))$
On a donc $dim(ker(f)) = 2$ ou $dim(ker(f)) = 3$ puisque $dim(ker(f))$ est un entier.
Mais $dim(ker(f)) = 3 \Rightarrow f = 0$ ce qui n'est pas le cas puisque f est nilpotent d'ordre 2 donc $f^1 \neq 0$
Il reste donc $dim(ker(f)) = 2$ et avec le théorème du rang $dim(Im(f)) = 1$

Bilan : $\boxed{dim(ker(f)) = 2 \text{ et } dim(Im(f)) = 1}$

4°)b)iii) $f(e_1)$ est non nul et est clairement dans $Im(f)$. Comme $Im(f)$ est de dimension 1 alors $(f(e_1))$ est une base de $Im(f)$
Comme $Im(f) \subset ker(f)$ et $dim(ker(f)) = 2$ on peut compléter la famille libre $(f(e_1))$ de $ker(f)$ en $(f(e_1), e_3)$ une base de $ker(f)$

Montrons que la famille $(f(e_1), e_1, e_3)$ est libre.
Supposons que : $af(e_1) + be_1 + ce_3 = 0$
En composant par f : $af^2(e_1) + bf(e_1) + f(e_3) = 0$, mais comme $f(e_1)$ et e_3 sont dans $ker(f)$ alors : $bf(e_1) = 0$ et comme $f(e_1) \neq 0$ alors $b = 0$
Il reste $af(e_1) + ce_3 = 0$ mais comme $(f(e_1), e_3)$ est une base de $ker(f)$ alors cette famille est libre et $a = b = 0$
On a donc $a = b = c = 0$ et donc $(f(e_1), e_1, e_3)$ est libre.
Comme le cardinal de cette famille vaut 3 et que l'on est dans $\mathbb{R}^3$ alors : $\boxed{(f(e_1), e_1, e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

4°)b)iv) $\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans cette base vaut } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

5°)a) Soit $k \in [\![1, p]\!]$ et $x \in \mathbb{R}^n$
$x \in ker(f^{k-1})$
$\Rightarrow f^{k-1}(x) = 0$ on compose par f
$\Rightarrow f(f^{k-1}(x)) = 0$
$\Rightarrow f^k(x)) = 0$
$\Rightarrow x \in ker(f^k)$

On a donc : $\boxed{\forall k \in [\![1, p]\!] \ , \ ker(f^{k-1}) \subset ker(f^k)}$

$f^k(f^{p-k}(e_1)) = f^p(e_1) = 0$ et $f^{k-1}(f^{p-k}(e_1)) = f^{p-1}(e_1) \neq 0$
Donc $f^{p-k}(e_1) \in ker(f^k)$ et $f^{p-k}(e_1) \notin ker(f^{k-1})$.

Remarque : on a pu faire ceci car $p - k \geq 0$

On en déduit que : $\boxed{\text{l'inclusion } ker(f^{k-1}) \subset ker(f^k) \text{ est stricte.}}$

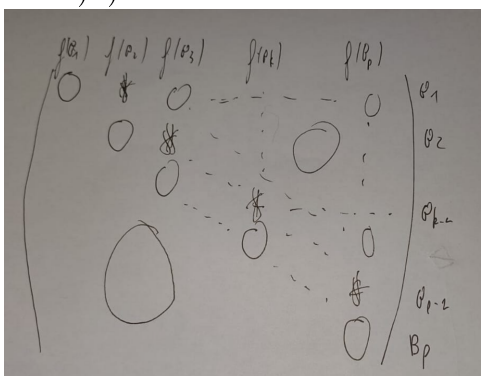
5°)b) Soit $x \in ker(f^k)$
Alors $f^k(x) = 0$ ou encore $f^{k-1}(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in ker(f^{k-1})$

On a donc : $\boxed{\text{l'image par } f \text{ du sous-espace } ker(f^k) \text{ est incluse dans } ker(f^{k-1})}$

5°)c) B_1 est une base de $ker(f)$ et $ker(f) \subset ker(f^2)$
B_1 est donc une famille libre de $ker(f^2)$ que l'on peut compléter (par le théorème de la base incomplète) en $B_1 \cup B_2$ une base de $ker(f^2)$
Comme l'inclusion $ker(f) \subset ker(f^2)$ est stricte alors B_2 est non vide.

L'existence de B_k est identique.

5°)d)



La diagonale est composée de 0

6°) Si T est la matrice de u dans la base $B = (v_1, \dots, v_n)$, alors, commme T est triangulaire supérieure, on a : $u(F_k) \subset F_{k-1}$ avec $F_k = Vect(v_1, \dots, v_k)$
On a aussi $u^2(F_k) \subset u(F_{k-1}) \subset F_{k-2}$ et donc par itération $u^n(\mathbb{R}^n) = u^n(F_n) = F_0 = 0$ donc $\boxed{T^n = 0}$

7°)a) On admet que : $M = PDP^{-1}$ avec $D = diag(d_1, \dots, d_i, \dots, d_n)$
Alors : $M^k = PD^kP^{-1}$ avec $D = diag(d_1^k, \dots, d_i^k, \dots, d_n^k)$

Si de plus M est nilpotente alors $\exists p \geq 1$, $M^p = 0$ et donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $d_i^k = 0 \Rightarrow d_i = 0$
Donc $D = 0$ et donc $M = 0$

$\boxed{\text{Si } M \text{ est symétrique et nilpotente alors } M \text{ est nulle.}}$

7°)b) • D'après le a) $S_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{N} = \{0\}$ donc $\boxed{S_n(\mathbb{R}) + \mathscr{N} = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{N}}$

• $S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{N} \subset E$ donc $dim(S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{N}) \leq dim(E)$
On en déduit : $dim(S_n(\mathbb{R})) + dim(\mathscr{N}) \leq n^2 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} + dim(\mathscr{N}) \leq n^2 \Rightarrow dim(\mathscr{N}) \leq \frac{n(n-1)}{2}$

On a donc : $\boxed{dim(\mathscr{N}) \leq \frac{n(n-1)}{2}}$

7°)c) L'ensemble des matrices triangulaire supérieure de diagonale nulle convient.

8°)a) Voir cours. $\boxed{dim(ker(tr)) = n^2 - 1}$
8°)b) Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors, d'après la question 5°)d) N est semblable à une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont nuls, donc N est semblable à une matrice de trace nulle, donc $tr(N) = 0$ et donc $N \in ker(tr)$
On a bien : $\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset ker(tr)}$

Comme $ker(tr)$ est un espace vectoriel alors : $Vect(ker(tr)) = ker(tr)$ et l'inclusion précédente donne : $\boxed{Vect(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \subset ker(tr)}$

9°)a) $E_{12}^2 = 0$, $E_{21}^2 = 0$ et $N^2 = 0$ donc $\boxed{E_{12},\ E_{21} \text{ et } N \text{ sont nilpotentes.}}$

9°)b) $M = \alpha E_{12} + \beta E_{21} + \gamma N \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha - \gamma \\ \beta + \gamma & -\gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = a \\ \alpha = b + a \\ \beta = c - a \end{cases}$

On a donc $M = (b+a)E_{12} + (c-a)E_{21} + aN$
et donc $\boxed{M \text{ est combinaison linéaire des trois matrices } N,\ E_{12} \text{ et } E_{21}}$

9°)c) Le b) permet de voir que $Vect(E_{12}, E_{21}, N) \subset Vect(\mathscr{N}_2(\mathbb{R}))$
Mais (E_{12}, E_{21}, N) est clairement libre, et comme son cardinal vaut 3 donc $dim(\mathscr{N}_2(\mathbb{R})) \geq 3$
Mais comme d'après le 8°)b) $Vect(\mathscr{N}_2(\mathbb{R})) \subset ker(tr)$ alors $dim(\mathscr{N}_2(\mathbb{R})) \leq dim(ker(tr)) = 2^2 - 1 = 3$
On a donc inclusion et égalité des dimensions donc $\boxed{Vect(\mathscr{N}_2(\mathbb{R})) = ker(tr)}$

10°)a) Pour $i \neq j$ on a : $E_{i,j}^2 = 0$ On a $N_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et donc $N_i^2 = 0$

Bilan : $\boxed{\text{Pour } i \neq j : E_{i,j}^2 = 0 \text{ et } \forall i \in [\![2, n]\!]\ ,\ N_i^2 = 0}$

10°)b) Formons une combinaison linéaire nulle des matrices de F_n : $\sum_{i=2}^{n} \mu_i N_i + \sum_{i \neq j} \tau_{i,j} E_{i,j} = 0$

Alors : $\begin{pmatrix} \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n & \tau_{1,2} - \mu_2 & \tau_{1,3} - \mu_3 & \dots & \tau_{1,n} - \mu_n \\ \tau_{2,1} + \mu_2 & -\mu_2 & \tau_{2,3} & \dots & \tau_{2,n} \\ \tau_{3,1} + \mu_3 & -\tau_{3,2} & -\mu_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \tau_{n-1,n} \\ \tau_{n,1} + \mu_n & \tau_{n,2} & \dots & \tau_{n,n-1} & -\mu_n \end{pmatrix} = 0$

Avec la diagonale (sauf le premier terme) on a les μ_i qui sont nuls. Les autres termes donnent alors que les $\tau_{i,j}$ sont nuls. Finalement tout les coefficients sont nuls et $\boxed{\text{la famille } F_n \text{ est libre.}}$
Comme $F_n \subset \mathscr{N}_n(\mathbb{R})$ alors $Vect(F_n) \subset Vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R}))$ donc
$dim(Vect(F_n)) = card(F_n) = (n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1 \leq dim(Vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R})))$

On a : $\boxed{n^2 - 1 \leq dim(Vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R})))}$

10°)c) D'après la question 8°) $vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R})) \subset ker(tr)$ donc $dim(vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R}))) \leq dim(ker(tr) = n^2 - 1$
Avec l'inégalité du b) on en déduit $dim(vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R}))) = n^2 - 1$ et comme on a inclusion et égalité des dimensions : $\boxed{vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R})) = ker(tr)}$

10°)d) F_n est libre et a le bon cardinal donc $\boxed{F_n \text{ est une base de } vect(\mathscr{N}_n(\mathbb{R})) = ker(tr)}$

On reprend le calcul du 10°)b) et on identifie $\sum_{i=2}^{n} \mu_i N_i + \sum_{i \neq j} \tau_{i,j} E_{i,j}$ à $M = (m_{i,j})$

On en déduit $M = \sum_{i=2}^{n} -m_{i,i} N_i + \sum_{i \neq j} \tau_{i,j} E_{i,j}$ avec pour $i \neq j$: $\tau_{i,j} = \begin{cases} m_{1,j} - m_{j,j} \text{ si } j \geq 2 \\ m_{i,1} + m_{j,j} \text{ si } i \geq 2 \\ {}_{i,j} \text{ si } i \geq 2 \text{ et } j \geq \end{cases}$