PSI* 2026-2027, Mathématiques DS n°2 : Correction, type 0

QUESTIONS DE COURS

1°) a) Les matrices $M_{B,C}(f)$ et $M_{B',C'}(f)$ sont de format $\boxed{(p,n)}$

$P_B^{B'}$ est de format $\boxed{(n,n)}$ et $P_C^{C'}$ est de format $\boxed{(p,p)}$

1°) b) On a : $\boxed{M_{B,C}(f) = P_{C,C'}M_{B',C'}(f)(P_{B,B'})^{-1}}$

2°) $\boxed{\int_0^1 ln(t)dt \text{ est convergente.}}$

$\boxed{\text{Pour } \alpha > 0 \text{ on a : } \int_0^{+\infty} exp(-\alpha t)dt \text{ est convergente.}}$

$\boxed{\text{Pour } \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt \text{ est convergente} \Leftrightarrow \alpha < 1 \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt \text{ est convergente} \Leftrightarrow \alpha > 1}$

3°) Dans un espace vectoriel de dimension finie.

$\boxed{\text{Un hyperplan } H \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur } E.}$

Remarque : On aurait pu utiliser une des caractérisations suivantes : Théorème 1 :H un sous espace vectoriel de E est un hyperplan $\Leftrightarrow dim(H) = n-1$
Théorème 2 : H un sous espace vectoriel de E est un hyperplan
si et seulement si il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$

4°) Au voisinage de $x = 0$:

$f(x) = (1 + x^2 + o(x^2) - 1)\frac{x - ln(1+x)}{xln(1+x)} = (x^2 + o(x^2))\frac{x-(x-\frac{x^2}{2}+o(x))}{x(x+o(x))} = (x^2 + o(x^2))\frac{\frac{x^2}{2}+o(x)}{x(x+o(x))} \sim x^2\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} \sim \frac{x^2}{2}$

On a donc $\boxed{f(x) \sim \frac{x^2}{2} \text{ au voisinage de } 0}$

EXERCICE 1

1°) a) Par linéarité de f la troisième relation donne : $f(i) + f(j) + f(k) = 2i + 2j + 2k$
En retranchant les deux première relations on a : $f(k) = i + j + 2k$

On en déduit : $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

1°) b) On en déduit facilement : $tr(f) = tr(A) = 1 + 2 + 2 = 5$

On a aussi : $det(f) = det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ après avoir fait $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

Ensuite par blocs : $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$

On a donc : $\boxed{tr(f) = 5 \text{ et } det(f) = 4}$

2°) a) Calculons le déterminant de B' relativement à B. $det_B(B') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

On retire C_1 aux autres colonnes et on a : $det_B(B') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

et donc $\boxed{B' \text{ est une base de } E}$

2°) b) P la matrice de passage de B à B' est alors : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$

3°) a) Montrer que : $f(v) = f(i+2k) = f(i) + 2f(k) = (i-j+k) + 2(i+j+2k) = 3i+j+5k$ et $2v+u = 2(i+2k) + (i+j+k) = 3i+j+5k$ donc $\boxed{f(v) = 2v+u}$

3°) b) Avec les matrices : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et donc $\boxed{f(u) = 2u}$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{f(w) = w}$

3°) c) Compte tenu des relations du a) et du b) : $\boxed{T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

3°) d) La formule de changement de bases pour un endomorphisme donne : $\boxed{A = PTP^{-1}}$

4°) a) On écrit $T = D + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On remarque que : $N^2 = 0$ et que $ND = DN = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors par la formule du binôme, comme N et D commutent : $T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} D^{n-k} N$

Comme $\forall k \geq 2$, $N^k = 0$ alors : $T^N = D^n + nD^{n-1}N$

$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

4°) b) A et T sont semblables, donc A^n et T^n aussi. On a alors $tr(A^n) = tr(T^n) = 2^{n+1} + 1$
D'autre part : $det(A^n) = det(A)^n = 4^n$

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ tr(A^n) = 2^{n+1} + 1 \text{ et } det(A^n) = 4^n}$

5°) a) P a une équation de la forme $ax+by+cz=0$

Alors $\begin{cases} u \in P \\ v \in P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2c \\ b=c \end{cases}$

En choisissant $c=1$ on a alors : $\boxed{P \text{ admet pour équation } -2x+y+z=0}$

5°) b) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \cap D$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X \in P \\ X \in D \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ X=\lambda w \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda+\lambda+0=0 \\ X=\lambda w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ X=0 \end{cases}$

Donc $P \cap D = \{0\}$ et donc la somme $P+D$ est directe.
$dim(P+D) = dim(P \oplus D) = 2+1 = 3 = dim(E)$ donc $P+D=E$

Bilan : $\boxed{E = P \oplus D}$

EXERCICE 2 : d'après e3a PC 2020 : exo4

1.• Démontrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété : $P_k \Leftrightarrow M^k \in F$

Initialisation : Au rang $k=0$: $M^0 = I_n \in Vect(I_n, M) = F$ On a P_0

Hérédité : $P_k \Rightarrow M^k \in F$
$\Rightarrow M^k = aI_n + bM$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow M^{k+1} = aM + bM^2$
$\Rightarrow M^{k+1} = aM + bM^2 = aM + b(\frac{3M-I_n}{2}) = \frac{-b}{2}I_n + (a+\frac{3b}{2})M \in F$ et on a donc P_{k+1}

Conclusion : On a montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ M^k \in F}$

• Clairement (I_n, M) est génératrice de F. Montrons que cette famille est libre.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $aI_n + bM = 0$
Par l'absurde, si $b \neq 0$ alors, en posant $c = \frac{-a}{b}$ on a : $M = cI_n$
Comme $2M^2 = 3M - I_n$ alors :
$2c^2 I_n = 3cI_n - I_n \Rightarrow (2c^2-3c+1)I_n = 0 \Rightarrow 2c^2-3c+1=0 \Rightarrow c=1$ ou $c=\frac{1}{2}$
Donc $M = I_n$ ou $M = \frac{-1}{2}I_n$, ce qui est exclu par l'énoncé. Absurde
On a donc $b=0$, reporté dans $aI_n + bM = 0$ on obtient $aI_n = 0$ soit $a=0$. On a alors $(a,b)=(0,0)$ et donc (I_n, M) est libre.

$\boxed{\text{La famille } (I_n, M) \text{ est libre et génératrice dans } F, \text{ c'est donc une base de } F \text{ qui est alors de dimension 2.}}$

2. Soit $P, Q \in F$, alors on écrit $P = aI_n + bM$ et $Q = cI_n + dM$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$
On a : $PQ = (aI_n + bM)(cI_n + dM) = acI_n + (bc + ad)M + bdM^2 \in F$ puisque I_n, M et M^2 sont dans F (par le 1.) qui est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

On a : $\forall P, Q \in F$, $PQ \in F$ et donc $\boxed{F \text{ est stable par multiplication.}}$

3. • Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
Alors $aA + bB = 0$
$\Rightarrow a(M - I_n) + b(M - \frac{1}{2}I_n) = 0$
$\Rightarrow (-a - \frac{1}{2}b)I_n + (a + b)M = 0$ on utilise que (I_n, M) est une base de F
$\Rightarrow \begin{cases} -a - \frac{1}{2}b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
La famille (A, B) est donc libre.
Comme c'est une famille libre de $dim(F) = 2$ vecteurs alors c'est une base de F.
$\boxed{\mathcal{B} = (A, B) \text{ constitue donc une base de } F}$

• $AB = (M - I_n)(M - \frac{1}{2}I_n) = M^2 - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I_n = \frac{3M - I_n}{2} - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I_n = 0$
De même $BA = AB = 0$
$A^2 = M^2 - 2M + I_n = \frac{3M - I_n}{2} - 2M + I_n = -\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}I_n = \frac{-1}{2}A$
$B^2 = M^2 - M + \frac{1}{4}I_n = \frac{3M - I_n}{2} - M + \frac{1}{4}I_n = \frac{1}{2}M - \frac{1}{4}I_n = \frac{1}{2}B$

Bilan : $\boxed{\begin{cases} AB = BA = 0 \\ A^2 = \frac{-1}{2}A \\ B^2 = \frac{1}{2}B \end{cases}}$

Ou, autrement dit : AB et BA ont pour coordonnées $(0, 0)$ dans (A, B), A^2 a pour coordonnées $(\frac{-1}{2}, 0)$ dans (A, B) et A^2 a pour coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ dans (A, B)

4. On cherche T sous la forme $T = aA + bB$ (on écrit T dans la base (A, B)

Alors $T^2 = M \Leftrightarrow (aA + bB)^2 = -A + 2B$ puisque l'on a remarqué que $M = -A + 2B$
$\Leftrightarrow (aA + bB)^2 = -A + 2B$
$\Leftrightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = -A + 2B$ en utilisant les résultats du 3.
$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}a^2A + \frac{1}{2}b^2B = -A + 2B$ en utilisant les résultats du 3.
$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{2}a^2 = -1 \\ \frac{1}{2}b^2 = 2 \end{cases}$ car (A, B) est une base
$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 4 \end{cases}$

Il y a donc 4 solutions à l'équation $T^2 = M$:
$\boxed{\text{les matrices } \sqrt{2}A + 2B,\ \sqrt{2}A - 2B,\ -\sqrt{2}A + 2B \text{ et } -\sqrt{2}A - 2B}$

Problème : Une famille de polynômes orthogonaux : polynômes de Tchebychev

A) 1°) a $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

L'intégrale $J = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ pose donc problème en -1 et en 1.

Soit (a,b) tel que $-1 < a < b < 1$ alors : $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [Arcsin(t)]_a^b = Arcsin(b) - Arcsin(a)$

Comme $\lim_{a \to -1} Arcsin(a) = \frac{-\pi}{2}$ et $\lim_{b \to 1} Arcsin(a) = \frac{\pi}{2}$ on en déduit J convergente et $\boxed{J = \pi}$

b) h est continue sur $[-1;1]$ qui est un intervalle fermé borné, donc d'après le théorèmes des bornes atteintes $\boxed{h \text{ est bornée sur } [-1;1]}$

c) D'après le b) il existe $M > 0$ tel que : $\forall t \in]-1;1[$, $\left| \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}$

Alors, avec le a) et la règle de comparaison pour des fonctions positives, on en déduit que $\boxed{I \text{ est convergente.}}$

2°) a) Voir cours de première année.

2°) b) Comme *arccos* est une bijection C^1 bijective de $]-1;1[$ vers $]0;\pi[$ alors
$\boxed{\text{on peut effectuer le changement de variable } C^1 \text{ bijectif } \theta = arccos(t)}$

2°) c) On a alors $d\theta = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ et donc $\boxed{I = \int_0^{\pi} h(cos(\theta)) d\theta}$

B) 3°) Soit $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
i) $< f, g >) =< g, f >$ évident
ii) $< f + \lambda g, h >=< f, h > +\lambda < g, h >$ par linéarité de l'intégrale puisque les intégrales sont convergentes
iii) $< f, f >= \int_{-1}^{1} \frac{f(t)^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et comme $\forall t \in]-1;1[$, $\frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$ alors $< f, f > \geq 0$
iv) $< f, f >= 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{f(t)^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0$, on a l'intégrale d'une fonction positive et continue sur $]-1;1[$ donc
$\forall t \in]-1;1[$, $\frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ et donc $f(t) = 0$ sur $]-1;1[$
Finalement, comme f est continue sur $[-1;1]$ on a $\forall t \in [-1;1]$, $f(t) = 0$ et donc $f = 0_E$

On a donc, d'après les points i),ii),iii),iv) que : $\boxed{<,> \text{ est un produit scalaire sur } E}$

4°) $(1, X)$ est déjà une base de F_1 puisque c'est la base canonique de F_1
De plus $< 1, X >= \int_0^{\pi} 1.cos(\theta) d\theta = [sin(\theta)]_0^{\pi} = 0$
Donc $\boxed{(1, X) \text{ est une base orthogonale de } F_1}$

5°) Comme (P_0, P_1) est orthogonale alors $Q_0 = \frac{P_0}{||P_0||}$ et $Q_1 = \frac{P_1}{||P_1||}$

$< P_0, P_0 >=< 1, 1 >= \int_0^{\pi} 1 d\theta = \pi$ donc $||P_0|| = \sqrt{\pi}$

$< P_1, P_1 >=< X, X >= \int_0^{\pi} cos^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{cos(2\theta)+1}{2} d\theta = [\frac{sin(2\theta)}{4}]_0^{\pi} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ donc $||P_1|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

On a donc $\boxed{Q_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ et } Q_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}X}$

C) 6°) $T_2 = 2X.X - 1$ et $T_3 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$

Bilan : $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1 \text{ et } T_3 = 4X^3 - 3X}$

7°) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$

Initialisation : Pour $n = 0$ $cos(0\theta) = 1 = P_0(\cos(\theta))$ et pour $n = 1$: $cos(1.\theta) = cos(\theta) = P_1(\cos(\theta))$

Hérédité : D'après la formule rappelée dans l'énoncé : $cos((n+2)\theta) + cos(n\theta) = 2cos(\theta)cos((n+1)\theta)$
Si on suppose HR_n et HR_{n+1} alors :
$cos((n+2)\theta) + T_n(cos(\theta)) = 2cos(\theta)T_{n+1}(cos(\theta))$ donc :
$cos((n+2)\theta) = 2cos(\theta)T_{n+1}(cos(\theta)) - T_n(cos(\theta)) = T_{n+2}(cos(\theta))$ et on a bien HR_{n+2} grâce à la relation de récurrence vérifiée par la suite (T_n)

On a donc montrer que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ T_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)}$

8°) a) Soit $p \neq q$ alors $< T_p, T_q >= \int_0^{\pi} T_p(cos(\theta))T_q(cos(\theta))d\theta = \int_0^{\pi} cos(p\theta)cos(q\theta)d\theta$
On utilise que : $cos(p\theta)cos(q\theta) = \frac{1}{2}(cos((p+q)\theta) + cos((p-q)\theta))$. On a alors :

$< T_p, T_q >= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}cos((p+q)\theta)d\theta + \int_0^{\pi} \frac{1}{2}cos((p-q)\theta)d\theta$
Or, comme $p \neq q \Rightarrow p - q \neq 0$ et $p + q \geq 0$ et $p \neq q$ donne $p + q \neq 0$
Et puisque $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a : $\int_0^{\pi} cos(k\theta)d\theta = [\frac{sin(k\theta)}{k}]_0^{\pi} = 0$

On en déduit : $\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\ ,\ p \neq q \Rightarrow < T_p, T_q >= 0}$

8°) b) $(T_0, ..T_n)$ est une famille échelonnée en degré de F_n, c'est donc une base de F_n
De plus, d'après le 8°)a), c'est une famille orthogonale.

Bilan : $\boxed{(T_0, ..T_n) \text{ est donc une base orthogonale de } F_n}$

9°) a) Soit $P \in F_{n-1}$ alors P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k T_k$ d'après le 8°) b).
Alors, par linéarité du produit scalaire : $< T_n, P >= \sum_{k=0}^{n-1} a_k < T_n, T_k >= 0$ d'après 8°) a).

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall P \in F_{n-1}\ ,\ < T_n, P >= 0}$

9°) b) On écrit T_n dans la base orthonormée $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ de F_n.
Alors $T_n = \sum_{k=0}^{n} < T_n, Q_k > Q_k$ et comme $< T_n, Q_k >= 0$ pour $k < n$ d'après le 9°) a) alors $T_n =< T_n, Q_n > Q_n$

On a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \exists \alpha_n \in \mathbb{R}\ ,\ T_n = \alpha_n Q_n}$

9°) c) Comme Q_n est de norme 1 alors $Q_n = \frac{T_n}{||T_n||}$ et donc $\alpha_n = ||T_n||$

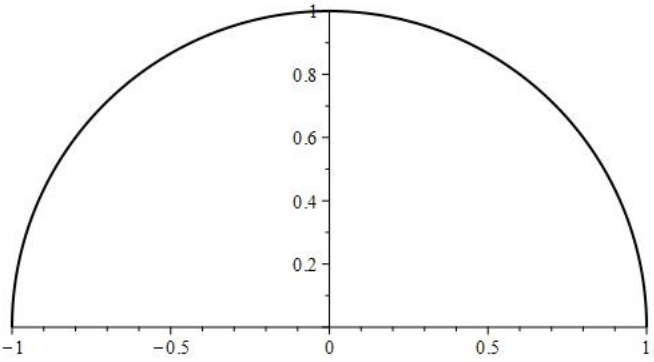
Mais $||T_n||^2 = \int_0^\pi (T_n(cos(\theta)))^2 d\theta$

Si $n = 0$: $||T_0||^2 = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi$ et si $n \neq 0$: $||T_n||^2 = \int_0^\pi cos^2(n\theta) d\theta = \int_0^\pi \frac{1+cos(2n\theta)}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}$

On a donc $\boxed{\alpha_0 = \sqrt{\pi} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \alpha_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

On en déduit $\boxed{Q_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2X^2 - 1) \text{ et } Q_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(4X^3 - 3X)}$

10°) La représentation graphique de φ est l'intersection du cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1 et du demi plan $y \geq 0$, c'est donc un $\boxed{\text{demi-cercle}}$.



11°) D'après le cours : $\boxed{P_\varphi = \sum_{k=0}^{n} < \varphi, Q_n > Q_n}$

12°) D'après le cours : $d(\varphi, F_n) = ||\varphi - P_\varphi||$

Par Pythagore on a : $\boxed{d(\varphi, F_n) = \sqrt{||\varphi||^2 - ||P_\varphi||^2} = \sqrt{||\varphi||^2 - \sum_{k=0}^{n} (< \varphi, Q_n >)^2}}$