Feuille d'exercices n°25 : chap. 8,9, revis.

Exercice 213. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On pose $\forall x \in E\ ,\ f(x) = \frac{1}{1+N(x)}$*
Montrer que f est 1-lipschitzienne.

Exercice 214. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On appelle B la boule ouverte de centre 0_E et de rayon 1.*
On pose $\forall x \in E\ ,\ f(x) = \frac{x}{1+N(x)}$
a) Montrer que f est à valeur dans B.
b) Montrer que f est une bijection de E dans B
c) Montrer que f et f^{-1} sont continues.

Exercice 215. *Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle de $M_n(\mathbb{R})$ est un fermé.*

Exercice 216. *Soit $E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ ,\ \sum_{i=1}^{n} i\,|x_i| \leq 1\}$ et f une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur E.*

Exercice 217. *($\star$)*
Soit (E, N_1) un espace vectoriel normé de dimension finie.
Soit (F, N_2) un espace vectoriel normé.
On pose $\forall \varphi \in L(E, F)\ ,\ |||\varphi||| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{N_2(\varphi(x))}{N_1(x)}$
Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $L(E, F)$

Exercice 218. *(Oral Mines-Télécom 2026, PSI*, Augustin G.)*
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} U_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = ln(1+u_n) \end{cases}$

1) Déterminer la limite de la suite (u_n)

2) Montrez que : $ln(u_{n+1}) - ln(u_n) \sim \frac{-u_n}{2}$

3) Déterminer la nature de $\sum u_n$

4) **(5/2)** *Déterminer la rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$*

Exercice 219. *(Oral Mines-Télécom 2026, PSI*, Léo M.)*

Soit A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que : $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto tr(A^T B)$ est un produit scalaire de $M_n(\mathbb{R})$

2) Soit : $H = \{A \in M_n(\mathbb{R})\ ,\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0\}$
Montrer que H est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer $dim(H)$.

3) Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tout les coefficients valent 1. Calculer $d(J, H)$.