Feuille d'exercices n°27 : chap. 11

Exercice 228. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction f_n sur $[0,+\infty[$ par :*
$\forall x \in [0,+\infty[\ ,\ f_n(x) = \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n \text{ si } x \in [0,n[\\ 0 \text{ si } x \geq n \end{cases}$

a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.

b) Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[\ 0 \leq f_n(x) \leq f(x)$

On pose $\forall x \in [0,+\infty[\ \Delta_n(x) = f(x) - f_n(x)$

c) Trouver une majoration simple de Δ_n sur $[n,+\infty[$

d) Calculer $\Delta_n'(x)$ sur $[0,n[$

e) Montrer que sur $[0,n[$, $\Delta_n'(x)$ est du même signe que $\varphi_n(x)$ avec $\varphi_n(x) = (n-1)ln(1-\frac{x}{n})+x$

f) Etudier la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ sur $[0,+\infty[$ et montrer qu'elle est bornée.

g) Etudier φ_n sur $[0,n[$

h) Montrer que : $||\Delta_n||_\infty = \sup_{[0,+\infty[} |\Delta_n(t)| \leq Max(\frac{M}{n}, e^{-n})$ avec M une constante.

i) Montrons que la convergence de f_n vers f est uniforme sur $[0,+\infty[$

Exercice 229. *a) Déterminer le domaine de définition de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$*

b) Déterminer le domaine de définition de $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2}}$

Exercice 230. *On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n(t) = t^n$ et on considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.*
a) Donner le domaine de définition de S.
b) Montrer que la convergence est uniforme sur $[-a,a]$ avec $a \in]0,1[$
c) La convergence est-elle uniforme sur le domaine de S ?

Exercice 231. *On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ u_n(t) = \frac{1}{n^2+t^2}$ et on considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.*
Etudier la convergence simple, la convergence uniforme et la convergence normale de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}$.