Feuille d'exercices n°28 : chap. 11

Exercice 232. *Soit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*
$\forall n \geq 1\ , \forall t \in [0,1]\ ,\ u_n(t) = n^2(1-t)t^n - (n-1)^2t^{n-1}(1-t)$
a) Montrer que : $\forall n \geq 1\ , \forall t \in [0,1]\ ,\ \sum_{k=1}^{n} u_k(t) = n^2(1-t)t^n$
b) Montrer que la série de fonction $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.
c) Comparer les valeurs : $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 u_k(t)dt$ *et* $\int_0^1 (\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t))dt$

Exercice 233. *Montrer que la série de fonctions :* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nxe^{-nx}}{n^2+1}$ *converge normalement sur son domaine.*

Exercice 234. *Étude de la fonction* $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2t^2}$ *: ensemble de définition, variations, limites, continuité, classe C^1,intégrabilité sur $]0,+\infty[$.*

Exercice 235. *Pour $x > 0$ on pose :* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$
a) Montrer que S est bien définie et est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$
b) Préciser le sens de variation de S.
c) Montrer que : $\forall x > 0\ ,\ S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$
d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en 0^+
e) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$

Exercice 236. *Pour $x > 0$ on pose :* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$
a) Justifier que S est continue et définie sur $]0,+\infty[$
b) Trouver une relation liant $S(x)$ et $S(x+1)$
c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en 0 et en $+\infty$

Exercice 237. *On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction :* $\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{n^2+2n+x^2} \end{array}$

1°) Montrer que la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2°) En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, *calculer* $\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+x^2}$

Exercice 238. *(⋆)*
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ de longueur non nul. Soit $f_0 \in C^0([a,b],\mathbb{R})$.
On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in [a,b]\ ,\ f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$. On note $F = \sum_{n\geq 0} f_n$

b) Justifier l'existence et le caractère C^1 sur $[a,b]$ de $G : x \mapsto \int_a^x F(t)dt$

c) A l'aide d'une équation différentielle vérifiée par G, déterminer F en fonction de f_0