Feuille d'exercices n°30 : chap. 12

Exercice 247. $\star$
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$
Montrer que : $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est de rayon de convergence $+\infty$

Exercice 248. $\star$
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$ Soit $\alpha > 0$
Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n^\alpha z^n$

Exercice 249. *On pose $I =]-1;1[$.*
a) Calculer $\forall x \in I \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$
b) Calculer $\forall x \in I \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$
c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$
d) Résoudre $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n)x^n = -4$

Exercice 250. *On considère la série entière $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$*
a) Déterminer le rayon de convergence R de S.
b) Calculer $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de série sur $]-R;R[$.
c) Calculer $S(x)$ sur $]-R;R[$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 251. *Soit la série entière $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$*
a) Déterminer le rayon de convergence de T.
b) Calculer $T(x)$ à l'aide des fonctions usuelles sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 252. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et calculer les sommes sur les intervalles ouverts de convergence.*

$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^2(-1)^n x^n \quad B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+3)}$

$C(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2+3n+2} x^n \quad D(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n+e^{-n}}{3^n} x^{2n+1}$

Exercice 253. *($\star$)*
a) Déterminer le rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$
b) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in]-1;1[\quad \frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b+cx}{1-x+x^2}$
c) Calculer S sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 254. *On considère la série entière $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*
a) Déterminer le rayon de convergence de S.
b) Calculer S sur son intervalle ouvert de convergence.