Feuille d'exercices n°33 : chap. 12

Exercice 264. $\star$

$$\text{Soit} \quad \begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} exp(\frac{-1}{t}) \text{ si } t>0 \\ 0 \text{ si } t\leq 0 \end{cases} \end{array}$$

1°) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists P_n\in\mathbb{R}(X)\ \forall t>0\ ,\ f^{(n)}(t)=P_n(t)exp(\frac{-1}{t})$

2°) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad f^{(n)}(0)=0$
3°) f est-elle développable en série entière en 0 ?

Exercice 265. *On considère l'équation différentielle suivante :*
$(E)\Leftrightarrow 4xy''(x)-2y'(x)+9x^2y(x)=0$
Trouver les solutions de (E) développable en série entière.

Exercice 266. *On considère la fonction F définie sur $I=]-1;1[$ par la relation :*
$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-xcos^2(t)}dt$
1°) Soit $x\in]-1;1[$ et $t\in[0;\frac{\pi}{2}]$.
Montrer que pour tout entier $N\geq 1$, on a :

$$\frac{1}{1-xcos^2(t)}=\sum_{n=0}^{N-1}(xcos^2(t))^n+x^N\frac{cos^{2N}(t)}{1-xcos^2(t)}$$

2°) En déduire que pour tout réel $x\in]-1;1[\quad F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}W_nx^n$ avec W_n une intégrale que l'on explicitera.
3°) Etablir que pour tout réel $x\in]-1;1[\quad F(x)=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$ (changement de variable $u=tan(t)$)
4°) Déterminer la valeur de W_n

Exercice 267. *Pour $x\in\mathbb{R}$ on pose : $f(x)=exp(\frac{-x^2}{2})\int_0^x exp(\frac{t^2}{2})dt$*
a) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f.
b) Montrer que f est développable en série entière en 0 et déterminer son développement.

Exercice 268. *Trouver les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle suivante :*

$$(E)\Leftrightarrow(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+y(x)=0$$

Exercice 269. *Trouver les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle suivante :*

$$(E)\Leftrightarrow 4xy''(x)+2y'(x)-y(x)=0$$

Exercice 270. *Trouver les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle suivante :*

$$(E)\Leftrightarrow x(x^2+1)y''(x)+2(x^2+1)y'(x)-2xy(x)=0$$