PSI* 2026-2027

**A rendre le jeudi 26 novembre 2026**

# Devoir à la maison n°6 de Mathématiques

| | | |
|---|---|---|
| Code couleur : | noir | à chercher par tous |
| | bleu | un peu plus dur, (où complément) |
| | rouge | assez difficile |
| | vert | difficile |

## Exercice 0

1) Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$

2) Déterminer la nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}+1}$

## Exercice 1

Soit $n \geq 2$ et $E = M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $<,>$ définit par :
$\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2 \ , \ < A, B >= tr(A^T B)$

On note $S_n = \{M \in E \ , \ M = M^T\}$ et $A_n = \{M \in E \ , \ M = -M^T\}$.

1°) Montrer que $S_n$ et $A_n$ sont en somme directe orthogonale.

On considère désormais $n = 2$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

2°) a) Déterminer $H$ la projection orthogonale de $M$ sur $S_2$.

2°) b) Déterminer la distance de $M$ à $A_n$.

## Exercice 2

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et $\forall a \in [0; +\infty[ \ \forall P \in E \ , \ N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \, dt$
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $Q_n = X^n$.

1°) Montrer que $N_a$ est une norme sur $E$.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $N_a(Q_n)$

3°) Dans cette question $a$ et $b$ sont deux réels tels que : $a < b$ et $b > 1$.

En utilisant le 2°) et en calculant $\frac{N_a(Q_n)}{N_b(Q_n)}$ montrer que $N_a$ et $N_b$ ne sont pas équivalentes.

4°) Montrer que si $(a,b) \in [0;1]^2$ alors $N_a$ et $N_b$ sont équivalentes.

## Exercice 3

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et $f \in L(E)$

1) Montrer que pour tout $y \in E$, il existe un unique couple $(x, z) \in ker(f)^{\perp} \times Im(f)^{\perp}$
tel que : $y = f(x) + z$

On construit ainsi une application $g$ de $E$ dans $E$ qui à $y$ associe $x$.

2) Montrer que $g$ est linéaire et déterminer son image et son noyau.
3) Etudier $g \circ f$
4) Etudier $f \circ g$

## Exercice 4

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geq 2$ et $E_n$ l'espace des fonctions continues sur $[0, n]$ et telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f$ est affine sur l'intervalle $[k; k+1]$.

1) Montrer que $E_n$ est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

On pose, pour tout $f \in E_n$ : $||f||_1 = \int_0^n |f(x)|\, dx$ et $||f||_\infty = \sup_{[0,n]} |f(x)|$

On pose : $a_n = \min_{\substack{f \in E_n \\ ||f||_\infty = 1}} ||f||_1$ et $b_n = \min_{\substack{f \in E_n \\ ||f||_1 = 1}} ||f||_\infty$

2) Démontrer l'existence des valeurs $a_n$ et $b_n$ et montrer que $a_n > 0$ et $b_n > 0$.
3) Déterminer $a_n$ et $b_n$

## Exercice 5

Soit $K$ une partie non vide fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f : K \longrightarrow K$ une application vérifiant : $\forall (x, y) \in K^2\ ,\ x \neq y \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$

Définition : on dit que $x \in K$ est un point fixe de $f$ si et seulement si $f(x) = x$

Montrer que $f$ admet un unique point fixe.

## Exercice 6

Soit $(E, N)$ un espace vectoriel normé et $F$ un sous espace vectoriel de $E$.

On suppose de plus que $F$ est un ouvert de $(E, N)$. Montrer alors que : $F = E$

## Exercice 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, bornée, vérifiant : $\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$
On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si il existe une suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\lambda = \lim_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)}$
On note $A$ l'ensemble des valeurs prises par de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
**En admettant que $A$ est non vide, montrer que $A$ est un segment.**