Feuille d'exercices posés aux oraux blancs PSI* 2024 par Mr Billette

1 Sujet 1

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.

a) Démontrer que la suite de réels définis par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \binom{k+n-1}{n-1} p^n q^k \qquad (q = 1-p).$$

définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle "loi de Pascal de paramètres n et p".
On utilisera la formule dite du "binôme négatif" :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;1[,\ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n}.$$

b) Soit X une variable aléatoire qui suit cette loi. Déterminer sa série génératrice. En déduire que X admet une espérance et une variance et la calculer.

c) On suppose que deux variables X et Y indépendantes suivent deux lois de Pascal de paramètres respectifs (n, p) et (m, p). Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

d) Démontrer la formule utilisée à la première question.

Exercice 2

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

a) Quel est le rayon de convergence de la série entière considérée ? Sur quel ensemble la fonction f est-elle définie ?

b) Exprimer $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles (il sera utile de s'intéresser à la dérivée de f).

c) Que valent $f(1)$ et $f(-1)$?

2 Sujet 2

Exercice 1

On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Établir pour tout x l'égalité $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k^2 + x^2}$.

Exercice 2

Dans $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Vérifier que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

b) Pour $f \in E$ strictement positive, on pose $l(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$.

Montrer que $l(f) \geqslant (b-a)^2$ et préciser les cas d'égalité.

3 Sujet 3

Exercice 1

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$.

a) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ et évaluer f en ces points.

b) La fonction f admet-elle au point $(0,0)$ un extremum local ?

c) Justifier que la fonction f admet un minimum sur l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 3\}$ et déterminer ce minimum.

d) Montrer que le minimum obtenu à la question précédente est global.

Exercice 2

Soit a, b et c trois nombres complexes et $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. On note $J = M(0,1,0)$.

a) Calculer J^2, puis exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I (matrice identité), J et J^2.

b) Démontrer que J est diagonalisable et préciser son spectre.

c) En déduire que $M(a,b,c)$ est diagonalisable et préciser aussi son spectre.

---

4 Sujet 4

Exercice 1

Soit, pour $f \in E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\Phi(f) : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f$ et $\Phi(f)(0) = f(0)$.

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est une fonction paire.

c) Montrer que 0 est une valeur propre de Φ et déterminer les vecteurs propres associés.

d) On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est une valeur propre de Φ. Montrer que toute fonction propre f est paire, puis que si F est la primitive de f nulle en 0, alors F est solution de l'équation différentielle $\lambda x y' - y = 0$. En déduire les valeurs propres non nulles de Φ et les vecteurs propres associés.

Exercice 2

Soit (U,V) un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

a) Rappeler la loi suivie par la somme de n variables aléatoires indépendante qui suivent un loi de Bernoulli de même paramètre p.

b) On pose $S = (U-1)^2 + (V-1)^2$. Déterminer la loi de S.

c) On pose $T = (U-1)(V-1)+1$. Calculer $E(S(T-1))$. Déterminer la loi de T . Calculer la covariance de (S,T). Les variables S et T sont-elles indépendantes ?
