Chapitre 1 : Révisions et compléments d'analyse

Dans ce chapitre, on va revoir les principales notions de première année, concernant l'étude locale et globale des fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On complétera aussi la partie calcul intégral.

1 Propriétés vérifiées sur une partie

1.1 Préliminaire

Définition. *Soit f une fonction définie sur un ensemble A et B une partie de A. Alors on dit que f vérifie une certaine propriété P sur B si et seulement si $f|_B$ vérifie P sur B.*

Exemple. $ln(x) \geq 0$ *sur* $[1; +\infty[$

1.2 Point adhérent

Définition. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Alors on dit que :*
a est **adhérent** *à A si et seulement si a est limite d'une suite d'éléments de A.*

Remarque. *On a pas forcément $a \in A$.*
Par contre si $a \in A$ alors a est adhérent à A (a est la limite de la suite constante égale à a).

Exemples. 0 *est adhérent à* $[0; 1]$.
0 *est adhérent à* $]0; 1[$.
0 *est adhérent à* $\{\frac{1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$
0 *n'est pas adhérent à* $]1; +\infty[$

1.3 Propriété au voisinage d'un point

Définition. *Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.*
Soit a un point adhérent à A.
Cas 1 : $a \in \mathbb{R}$
On dit que f vérifie une propriété P au voisinage de a
si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que f vérifie P sur $]a - \epsilon; a + \epsilon[\cap A$
Cas 2 : $a = +\infty$
On dit que f vérifie une propriété P au voisinage de $+\infty$
si et seulement si il existe M tel que f vérifie P sur $]M; +\infty[\cap A$
Cas 3 : $a = -\infty$
On dit que f vérifie une propriété P au voisinage de $-\infty$
si et seulement si il existe M tel que f vérifie P sur $] - \infty; M[\cap A$

Exemples. $sin(x) \geq 0$ *au voisinage de* $\frac{\pi}{2}$
$exp(x) \geq x^{139}$ *au voisinage de* $+\infty$

1.4 Exemple de propriété globale : fonction bornée sur une partie

Définition. *Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Alors, on dit que : f est bornée sur A si et seulement si $\exists M > 0\ ,\ \forall x \in A\ ,\ abs f(x) \leq M$

1.5 Exemple de propriété locale : limite en un point

Définition. *Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et soit a un point adhérent à A.*
Soit $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.
Alors on dit que f tend vers λ lorsque x tend vers a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lambda$ si et seulement si

cas 1 : $a \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in A \ \ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-\lambda| < \epsilon$$

cas 2 : $a \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda = +\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in A \ \ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)| > M$$

cas 3 : $a \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in A \ \ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)| < M$$

cas 4 : $a = +\infty$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A \ x > M \Rightarrow |f(x)-\lambda| < \epsilon$$

cas 5 : $a = +\infty$ *et* $\lambda = +\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists M \in \mathbb{R} \mid x \geq M \Rightarrow f(x) \geq A$$

cas 6 : $a = +\infty$ *et* $\lambda = -\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists M \in \mathbb{R} \mid x \geq M \Rightarrow f(x) \leq A$$

cas 7 : $a = -\infty$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A \ x < M \Rightarrow |f(x)-\lambda| < \epsilon$$

cas 8 : $a = -\infty$ *et* $\lambda = +\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists M \in \mathbb{R} \mid x \leq M \Rightarrow f(x) \geq A$$

cas 9 : $a = -\infty$ *et* $\lambda = -\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists M \in \mathbb{R} \mid x \leq M \Rightarrow f(x) \leq A$$

2 Continuité, dérivabilité

2.1 Continuité en un point

Définition. *Soit f une fonction de I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.*
Alors on dit que : f est continue en a si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Remarque. *En général, on ne revient pas à la définition mais on utilise les propriétés vues en première année, comme par exemple, la somme, le produit ou la composée de deux fonctions continues est continue,etc..*
La continuité en un point est une propriété **locale**.

2.1.1 Continuité à gauche et à droite

Définitions. *Soit f une fonction de I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.*
Alors on dit que :
f est continue à droite en a si et seulement si, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$
f est continue à gauche en a si et seulement si, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

2.2 Nombre dérivé

2.2.1 Nombre dérivé en un point

Définition. *Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.*
Alors, si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *existe et est réelle alors* $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *est appelé* ***nombre dérivé*** *de f en a et on dit que* ***f est dérivable*** *en a.*

Remarque. *C'est une notion locale.*

2.2.2 Nombre dérivé en un point, à droite et à gauche

Définitions. *Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.*
Alors, si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *existe et est réelle alors* $f'_g(a) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *est appelé* nombre dérivé à gauche de *f en a et on dit que* f est dérivable gauche *en a.*
Si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *existe et est réelle alors* $f'_d(a) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *est appelé* nombre dérivé à droite de *f en a et on dit que* f est dérivable à droite *en a.*

2.2.3 Propriété

Propriété. *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*
Si f est dérivable à gauche en a alors f est continue à gauche en a.
Si f est dérivable à droite en a alors f est continue à droite en a.

preuve : Cf cours de première année

Remarque. *Réciproque fausse*

2.3 Dérivée de la réciproque

Propriété. *Si f est bijective de I dans J. Soit $a \in I$ et $b = f(a)$*
Alors si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$, on a f^{-1} dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}$

Remarque. *On peut retrouver cette formule en dérivant : $f(f^{-1}(b)) = b$ par rapport à b*

Preuve :

2.4 Passage à une définition globale

Définition. *Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de A.*
Alors on pose : $\begin{array}{cccc} f' & : & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ *f' est alors appelée fonction dérivée de f*

Remarques. *Si f' est dérivable sur A alors on note f'' ou $f^{(2)}$ sa fonction dérivée.*
On peut ainsi définir les dérivées successives de f par la relation de récurrence : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.
Les fonctions de classe C^k sur A sont les fonctions k fois dérivables et de dérivée k-ième continue.
Une fonction de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ est dite de classe C^∞.

3 Etude locale : comparaison de fonctions

3.1 Définitions

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions définie sur I une partie de $\mathbb{R}$ et soit a un point adhérent de I. On suppose de plus que : $\forall x \in I \ , \ g(x) \neq 0$.

Alors, on dit que :
f est **équivalente** à g au voisinage de a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

f est **négligeable** devant g au voisinage de a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

f est **dominée** par g au voisinage de a si et seulement si $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a

3.2 Notations

Avec les notations précédentes :
— si f est équivalente à g au voisinage de a on note : $f(x) \underset{x=a}{\sim} g(x)$ ou simplement $f(x) \sim g(x)$

— si f est négligeable devant g au voisinage de a on note : $f(x) = \underset{x=a}{o}(g(x))$ ou simplement $f(x) = o(g(x))$

— si f est dominée par g au voisinage de a on note : $f(x) = \underset{x=a}{O}(g(x))$ ou simplement $f(x) = O(g(x))$

Remarques. *Il n'y a pas d'équivalent à la fonction nulle.*
On ne peut pas, en général, ajouter deux équivalents.
On peut multiplier ou diviser deux équivalents.
On ne peut pas, en général, composer deux équivalents.
$f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a s'écrit aussi : il existe une fonction ϵ définie au voisinage de a telle que, au voisinage de a : $f(x) = \epsilon(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 1$. (ceci permet d'étudier le cas ou g s'annule au voisinage de a)

3.3 Propriété

Lemme. *Pour f et g deux fonctions définies au voisinage de a :*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \Longleftrightarrow f(x) \sim g(x)$$

preuve :

Exemple. *Au voisinage de 0 : $f(x) = x + xsin(x) \Rightarrow f(x) = x + o(x) \Rightarrow f(x) \sim x$*

3.4 Développements limités

3.4.1 Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I un voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors, on dit que f admet un développement limité en a à l'ordre n, si et seulement si,
il existe $(a_0, a_1, ...a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$

Remarques. *Un développement limité est unique et il faut connaître par coeur les développements limités usuels.*
On peut ajouter, diviser, multiplier, composer des DL et en déduire des équivalents.

3.4.2 DL usuels

Pour x au voisinage de 0, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

3.4.3 Formule de Taylor-Young

Théorème . *Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^n au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Alors f admet en a un développement limité d'ordre n donné par :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

preuve : cf cours de première année

3.4.4 Exemples

DL en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \frac{exp(x)}{1-\sin(x)} = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + o(x^3)$
DL en $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 2 de $g(x) = cos(2x) = \frac{1}{2} - \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3}) - (x - \frac{\pi}{3})^2 + o((x - \frac{\pi}{3})^2)$.

4 Etude globale

4.1 Théorème des valeurs intermédiaires

4.1.1 Enoncé

Théorème . **Soit $[a,b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Alors si $f(a)f(b) < 0$ on a $\exists c \in [a,b]$ tel que : $f(c) = 0$.**

Remarque. *Autrement dit :* $\forall d \in [f(a); f(b)]\ ,\ \exists c \in [a;b]\ ,\ f(c) = d$

4.1.2 Preuve

4.1.3 Exemple

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \exists x_n \in [0, \frac{\pi}{2}[\ ,\ tan(x_n) = n$
b) Etudier $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

4.2 Théorème des bornes atteintes

4.2.1 Enoncé

Théorème . **Soit $[a,b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a;b]$, c'est-à-dire qu'il existe c_m et c_M deux éléments de $[a,b]$ tels que : $\forall x \in [a;b] \quad f(c_m) \leq f(x) \leq f(c_M)$**

Remarque. *On peut dire que l'image d'un intervalle fermé borné par une application continue est un intervalle fermé borné.*
On a alors $f([a;b]) = [f(c_m); f(c_M)]$.

preuve : preuve HP

4.2.2 Exemple

Montrer que :$f : x \mapsto x^2 e^{-x} sin(ln(1+x^2))$ atteint ses bornes sur $I = [0, +\infty[$

4.3 Théorème des accroissements finis

4.3.1 Enoncé

Théorème . **Soit $[a,b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Alors si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ on a : $\exists c \in]a;b[$ tel que : $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.**

4.3.2 Preuve

4.3.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème . **Dans le cadre du théorème ci-dessus, si on a :**
$\forall x \in]a;b[\ \ |f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M\,|b-a|$.

4.3.4 Preuve

4.3.5 Interprétations

Pour le cas d'égalité et le cas d'inégalité.

4.3.6 Exemple

Suite de l'exemple du TVI : montrer que : $x_{x+1} - x_n \underset{+\infty}{\sim} (\frac{\pi}{2} - x_n)^2$

4.4 Monotonie

Définitions. *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.*
Alors on dit que f est croissante sur I si et seulement si $\forall(x,y)\in I^2\ x<y\Rightarrow f(x)\leq f(y)$
Alors on dit que f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall(x,y)\in I^2\ x<y\Rightarrow f(x)<f(y)$
Alors on dit que f est décroissante sur I si et seulement si $\forall(x,y)\in I^2\ x<y\Rightarrow f(x)\geq f(y)$
Alors on dit que f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall(x,y)\in I^2\ x<y\Rightarrow f(x)>f(y)$

Théorème : Si f est une fonction dérivable sur un segment I alors :
$\forall x\in I\ f'(x)\geq 0\ \Rightarrow f$ est croissante sur I
$\forall x\in I\ f'(x)\leq 0\ \Rightarrow f$ est décroissante sur I
$\forall x\in I\ f'(x)>0\ \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I
$\forall x\in I\ f'(x)<0\ \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur I

preuve : cf cours de première année

4.5 Théorème de la limite de la dérivée

4.5.1 Enoncé

Théorème . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a\in I$.
Alors, si f est continue sur I et dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)=\lambda\in\mathbb{R}$

alors f est dérivable en a et $f'(a)=\lambda$

Remarques. *f' est alors continue en a.*
Si λ vaut $+\infty$ ou $-\infty$ alors f admet une tangente verticale en $(a,f(a))$ et n'est pas dérivable en a.

4.5.2 Preuve

4.5.3 Exemple

Etude en 0 de $\begin{array}{cccc} f & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \arcsin(1-x^2) \end{array}$

5 Représentation graphique d'une fonction

5.1 Préliminaires, notations

Dans cette section on notera f une fonction de I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\Gamma=\{(x,f(x))\ ,\ x\in I\}$. Γ est appelé représentation graphique de f.

Remarque. *On gardera ces notations pour la suite de la section.*

5.2 Parité

Définitions. *Soit f une fonction à valeurs réelles définies sur une partie I de $\mathbb{R}$.*
Alors, si I est centré en 0 et si $\forall x\in I\ ,\ f(-x)=f(x)$, on dit que : f est paire.
Alors, si I est centré en 0 et si $\forall x\in I\ ,\ f(-x)=-f(x)$, on dit que : f est impaire.

Remarque. *I est centré en $0\Leftrightarrow\forall x\in I\ ,\ -x\in I$*

Lemme. *Si f est paire, alors Γ_f est symétrique par rapport à l'axe Oy.*
Si f est impaire, alors Γ_f est symétrique par rapport à O.

5.3 Tangente

Rappel : Si f est dérivable en a alors ; :
la droite d'équation cartésienne : $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ est appelée tangente à Γ au point $(a, f(a))$.

DESSIN

Remarques. *On peut étudier la position relative de la courbe et de sa tangente avec les DL .*
La tangente est la représentation graphique de l'approximation de f à l'ordre 1, au voisinage de a. C'est la droite passant par $(a, f(a))$, de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple. *Tangente à $f : x \mapsto ln(1 + sin(e^x - 1))$ au point d'abscisse* 0.

5.4 Convexité

5.4.1 Définition

Définition. *Soit f une fonction à valeurs réelles définies sur une partie I de $\mathbb{R}$.*
Alors on dit que : f est convexe sur I
si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2 \ \forall \lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

DESSIN :

Interprétation : la courbe est au dessous de ses cordes

5.4.2 Position de la courbe par rapport à sa tangente

Propriété. *Si f est une fonction convexe dérivable sur I alors la représentation graphique de f est au dessus de ses tangentes.*

preuve : cf sup

5.4.3 Cas des fonctions deux fois dérivables

Propriété. Si f est deux fois dérivable sur I et si $f''(x) \geq 0$, alors f est convexe sur I.

preuve : cf sup

Remarque : si f est simplement dérivable alors on a f' croissante

Exemple : exp est convexe sur $\mathbb{R}$

5.4.4 Exemple d'inégalité de convexité

Exercice. $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq sin(x) \leq x$ *et* $\forall (x,y) \in]0; +\infty[^2$, $\ln(\frac{x+y}{2}) \geq \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y)$

5.5 Exemple d'étude de fonction

Etude de $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

6 Calculs de primitives et d'intégrales

6.1 Primitives

Définition. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie I de $\mathbb{R}$. Alors on dit que : F est une primitive de f sur I, si et seulement si, F est dérivable sur I et $\forall x \in I \ , \ F'(x) = f(x)$.*

Lemme. *1*
***Sur un intervalle**, deux primitives diffèrent d'une constante.*

Lemme. *2*
Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors f admet une primitive sur I.

preuve : Cf cours de première année

Notations : On note $\int f(x)dx$ ou $\int f$ une primitive quelconque de f.

6.2 Primitives usuelles

$\int sin(x)dx = -cos(x)$ $\qquad$ $\int cos(x)dx = sin(x)$
$\int ch(x)dx = sh(x)$ $\qquad$ $\int sh(x)dx = ch(x)$
$\int \frac{1}{x}dx = ln(|x|)$ $\qquad$ $\forall n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsin(x)$ $\qquad$ $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctan(x)$

6.3 Intégrales

Définition. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.*
Alors on pose : $\forall (a,b) \in I^2 \ , \ \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

On dit que $\int_a^b f(x)dx$ est l'intégrale de f entre a et b. Cette valeur ne dépend pas du choix de la primitive F.

Exemple. $\int_1^2 \frac{ln(x)}{x}dx$

6.4 Changement de variable

Lemme. *Soit $I = [a, b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$, ϕ une fonction dérivable sur I et f une fonction continue sur $\phi(I)$. Alors :*

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du$$

Remarque. *On dit que l'on a effectuer le changement de variable $u = \phi(t)$.*

preuve :

Exemple. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+x}dx$

6.5 Intégration par parties

Lemme. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soient f et g deux fonctions dérivables sur I.*

Alors : $\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$

preuve :

Exemple. $\int_0^1 (x-1)e^{2x}dx$

6.6 Sommes de Riemman

Théorème . *Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors :*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)dx$$

preuve : cf première année

Exemple : $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$

7 Compléments de calcul intégral

Dans ce paragraphe, les fonctions sont à valeurs dans K avec $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$.
Le but est de généraliser la notion d'intégrale que l'on vient de revoir.

7.1 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition. *On dit qu'une fonction f définie sur un segment $[a;b]$ est* ***continue par morceaux*** *sur $[a;b]$* **s'il existe une subdivision $a=a_0<a_1<...<a_n=b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i;a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction continue sur $[a_i;a_{i+1}]$.**

Remarques. *On dit alors que la subdivision $a=a_0<a_1<...<a_n=b$ est adaptée à f*
Le nombre de discontinuité de f est finie.
Une fonction continue est continue par morceaux.
Les fonctions en escalier sont continues par morceaux.

7.2 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition. *On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est* ***continue par morceaux*** *sur I* **si pour tout segment $[a;b]\subset I$, la restriction de f à $[a;b]$ est continue par morceaux sur $[a;b]$.**

7.3 Exemples

7.4 Propriété

Proposition. *Si I est intervalle de $\mathbb{R}$ alors l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I est un K espace vectoriel.*

Remarques. *On note parfois $C^0_{PM}(I)$ cet ensemble.*
Le produit de deux fonctions continues par morceaux sur I est continue par morceaux sur I.

7.5 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Définition. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ et $a=a_0<a_1<...<a_n=b$ une subdivision adaptée à f.*

Alors on pose $\int\limits_a^b f(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$

avec $\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$ l'intégrale de la restriction de f à $]a_k;a_{k+1}[$ prolongée par continuité sur $[a_k;a_{k+1}]$.

Remarques. *Cette valeur est aussi notée $\int\limits_{[a;b]} f$ ou encore $\int\limits_a^b f$, elle est indépendante de la subdivision adaptée à f.*

On pose $\int\limits_a^b f(t)dt = -\int\limits_b^a f(t)dt$ (et donc $\int\limits_a^a f(t)dt=0$)

Interprétation

7.6 Propriétés

Ce sont presque les mêmes que celles vues en premières années pour l'intégrale des fonctions continues ...

7.6.1 Linéarité de l'intégration

Propriété. *Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$ et $\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors :*

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

7.6.2 Partie réelle, partie imaginaire

Propriété. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$.*

Alors $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues par morceaux sur $[a;b]$ et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f(t))dt + i \int_a^b Im(f(t))dt$

7.6.3 Positivité et croissance de l'intégration des fonctions réelles

Proposition. *Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :*

- $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \geq 0$
- $f \leq g \ \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

7.6.4 Inégalité de la moyenne

Proposition. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Alors $|f|$ est continue par morceaux sur $[a;b]$ et $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$

7.6.5 Relation de Chasles

Proposition. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$.*

Soient a, b et c dans I. Quel que soit l'ordre de a, b, c on a $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

7.7 Théorème de l'intégrale nulle

Avertissement : le théorème de l'intégrale nulle ci-dessous, n'est valable que pour les fonctions continues et pas pour les fonctions continues par morceaux.

Théorème . *Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$ et f une application* **CONTINUE** *de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :*

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a;b] \\ \forall t \in [a;b]\ , f(t) \geq 0 \\ \int_a^b f(t)dt = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow f \text{ est nulle sur } [a;b]$$

Sommaire